



REFORMULASI STRUKTURAL MASALAH PEWARISAN SIFAT *NIL-CLEAN* PADA *CORNER RING*

Eristining Sabda Alami^{1✉}, Mashuri²

Info Artikel

Article History:

Received July 2026

Revised July 2026

Accepted July 2026

Keywords:

Corner ring, Jacobson radical, nil-clean ring, quotient ring, structural reformulation

How to Cite:

Alami, E. S., & Mashuri. (2026). Reformulasi Struktural Masalah Pewarisan Sifat Nil-Clean pada Corner Ring. *Jurnal Silogisme: Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya*, 11 (1), halaman (78-85).

Abstrak

Permasalahan mengenai pewarisan sifat *nil-clean* pada *corner ring* merupakan salah satu pertanyaan terbuka dalam teori *ring* yang hingga kini belum memperoleh penyelesaian umum. Penelitian ini bertujuan mengkaji hubungan struktural antara *nil-clean ring* dan *corner ring* melalui sintesis karakterisasi *nil-clean ring* dengan hasil struktural mengenai radikal Jacobson dan *corner ring*. Penelitian dilakukan menggunakan pendekatan matematika teoretis dengan metode deduktif melalui studi pustaka terhadap berbagai hasil penelitian yang relevan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa apabila R merupakan *nil-clean ring*, maka radikal Jacobson dari *corner ring* memenuhi $J(eRe) = eJ(R)e$, sehingga $J(eRe)$ juga merupakan ideal *nil*. Dengan demikian, sifat *nil-clean* pada *corner ring* dapat dikarakterisasi melalui *quotient ring* $(eRe)/J(eRe)$. Selain itu, penelitian ini menunjukkan bahwa penentuan sifat *nil-clean* pada eRe ekuivalen dengan penentuan sifat *nil-clean* pada *corner ring* yang bersesuaian di atas *quotient ring* $R/J(R)$. Kontribusi utama penelitian ini adalah penyusunan suatu kerangka struktural terpadu yang mereformulasikan pertanyaan terbuka mengenai pewarisan sifat *nil-clean* ke dalam kerangka *quotient ring* dan radikal Jacobson. Meskipun belum memberikan penyelesaian terhadap permasalahan tersebut, hasil penelitian ini menawarkan sudut pandang alternatif yang dapat menjadi landasan bagi penelitian lanjutan.

Abstract

The inheritance of the nil-clean property under corner ring construction remains an open problem in ring theory. This study aims to investigate the structural relationship between nil-clean rings and corner rings by synthesizing the characterization of nil-clean rings with structural results on Jacobson radicals and corner rings. The research employs a theoretical mathematical approach based on deductive reasoning through a comprehensive literature study of relevant works. The results show that if R is a nil-clean ring, then the Jacobson radical of its corner ring satisfies $J(eRe) = eJ(R)e$, implying that $J(eRe)$ is also a nil ideal. Consequently, the nil-clean property of the corner ring can be characterized through the quotient ring $(eRe)/J(eRe)$. Furthermore, the study establishes that determining whether eRe is nil-clean is equivalent to determining whether the corresponding corner ring over the quotient ring $R/J(R)$ is nil-clean. The main contribution of this study is the development of a unified structural framework that reformulates the open problem on the inheritance of the nil-clean property within the setting of quotient rings and Jacobson radicals. Although the study does not resolve the open problem, it provides an alternative structural perspective that may serve as a foundation for future research.

PENDAHULUAN

Teori *ring* merupakan salah satu cabang fundamental dalam aljabar abstrak yang mempelajari struktur aljabar beserta sifat-sifatnya. Salah satu topik penting dalam teori *ring* adalah dekomposisi elemen, yaitu menyatakan setiap elemen sebagai kombinasi dari elemen-elemen yang memiliki sifat aljabar tertentu. Kajian mengenai dekomposisi elemen telah melahirkan berbagai kelas *ring* penting, salah satunya adalah *clean ring*. Nicholson (1977) memperkenalkan konsep *clean ring* sebagai *ring* yang setiap elemennya dapat dinyatakan sebagai penjumlahan suatu elemen idempoten dan suatu unit. Sejak diperkenalkan, *clean ring* menjadi salah satu topik penelitian yang berkembang pesat dan melahirkan berbagai generalisasi serta kajian mengenai struktur *ring* (Nicholson & Zhou, 2005). Perkembangan tersebut menjadikan dekomposisi *clean* sebagai salah satu pendekatan penting dalam memahami struktur aljabar suatu *ring*.

Selain melalui dekomposisi elemen, berbagai sifat aljabar suatu *ring* juga dipelajari melalui konstruksi *subring* tertentu. Salah satu konstruksi yang paling penting adalah *corner ring*. Jika R adalah suatu *ring* dan e merupakan elemen idempoten di dalam R , maka

$$eRe = \{ere \mid r \in R\}$$

membentuk suatu *corner ring* dari R . *Corner ring* muncul secara alami dalam teori dekomposisi, teori Morita, serta kajian mengenai struktur aljabar yang dibangun oleh elemen-elemen idempoten. Oleh karena itu, salah satu permasalahan penting dalam teori *ring* adalah menentukan apakah suatu sifat aljabar dari sebuah *ring* tetap dipertahankan ketika dibentuk *corner ring*.

Hubungan antara *clean ring* dan *corner ring* telah banyak diteliti. Han dan Nicholson (2001) membuktikan bahwa apabila kedua *corner ring*, yaitu eRe dan $(1 - e)R(1 - e)$, bersifat *clean*, maka *ring* R juga bersifat *clean*. Akan tetapi, Šter (2012) menunjukkan bahwa konvers dari pernyataan tersebut tidak selalu berlaku dengan mengonstruksi suatu *clean ring* yang *corner ring*-nya bukan merupakan *clean ring*. Contoh tandingan ini menunjukkan bahwa suatu sifat aljabar tidak selalu diwariskan dari sebuah *ring* ke *corner ring*-nya, sehingga mendorong penelitian lebih lanjut pada kelas-kelas *ring* lainnya.

Salah satu generalisasi penting dari *clean ring* adalah *nil-clean ring* yang diperkenalkan oleh Diesl (2013), yaitu *ring* yang setiap elemennya dapat dinyatakan sebagai penjumlahan suatu elemen idempoten dan suatu elemen nilpoten. Dalam karya yang sama, Diesl memberikan beberapa karakterisasi fundamental mengenai *nil-clean ring* serta membuktikan bahwa sifat *strongly nil-clean* selalu diwariskan ke *corner ring*. Namun demikian, permasalahan serupa untuk *nil-clean ring* hingga kini masih belum terselesaikan, sehingga memunculkan pertanyaan terbuka mengenai apakah setiap *corner ring* dari suatu *nil-clean ring* juga selalu bersifat *nil-clean*.

Sejak dipublikasikannya hasil Diesl, permasalahan pewarisan sifat tersebut mendorong berbagai penelitian pada kelas-kelas *ring* yang berkaitan. Breaz dkk. (2013) mengkaji permasalahan serupa pada *ring* matriks dan memperoleh hasil positif untuk beberapa kasus penting. Chen dan Sheibani (2017) memperluas kajian mengenai *strongly nil-clean rings* dengan memberikan berbagai karakterisasi struktural yang melibatkan radikal Jacobson dan *quotient ring*. Selanjutnya, Danchev (2017) meneliti hubungan struktural antara *complementary corner rings* dan sifat *nil-clean* global melalui konsep *semi-Boolean rings*. Danchev (2018) kemudian membuktikan bahwa sifat *invo-clean* diwariskan pada *corner ring*, sedangkan Chen dan Sheibani (2023) menunjukkan bahwa sifat *Yaqub nil-clean* juga dipertahankan pada *corner ring*. Selain itu, Bisht (2023) memperkenalkan konsep *semi-nil clean ring* sebagai generalisasi dari *nil-clean ring* serta menunjukkan berbagai karakterisasi strukturalnya, termasuk hubungan sifat *semi-nil clean* dengan *corner ring* pada kelas *ring* tertentu. Berbagai hasil tersebut menunjukkan bahwa kajian mengenai *nil-clean ring* masih terus berkembang ke berbagai arah, baik melalui generalisasi konsep maupun karakterisasi kelas-kelas *ring* baru. Sebagai contoh, Cui dkk. (2023) mengkaji *ring* yang setiap elemen *nil-clean* maupun *clean* memiliki representasi *nil-clean* yang unik (*uniquely nil-clean*), sehingga memperluas pemahaman mengenai struktur dekomposisi elemen

pada teori *ring*. Meskipun demikian, pertanyaan mengenai pewarisan sifat pada *nil-clean ring* secara umum masih tetap merupakan masalah terbuka.

Meskipun berbagai hasil positif telah diperoleh untuk beberapa generalisasi *nil-clean ring*, hingga saat ini belum terdapat penelitian yang secara khusus mengkaji reformulasi struktural terhadap pertanyaan terbuka Diesl melalui hubungan antara *corner ring*, radikal Jacobson, dan *quotient ring*. Padahal, pemahaman terhadap hubungan struktural tersebut penting karena memungkinkan permasalahan pewarisan sifat *nil-clean* dianalisis melalui komponen-komponen penyusunnya, sehingga keterkaitan antara struktur *ring* asal, radikal Jacobson, dan *quotient ring* menjadi lebih jelas. Kerangka struktural semacam ini tidak hanya membantu menjelaskan mengapa suatu sifat dapat diwariskan, tetapi juga dapat menjadi dasar dalam merumuskan strategi pembuktian maupun membangun contoh tandingan pada kelas-kelas *ring* tertentu. Oleh karena itu, penyusunan suatu kerangka struktural yang mengintegrasikan hubungan tersebut menjadi penting sebagai landasan teoretis bagi pengembangan penelitian mengenai pewarisan sifat *nil-clean* pada *corner ring*.

Berdasarkan permasalahan tersebut, penelitian ini bertujuan untuk mengkaji hubungan struktural antara *nil-clean ring* dan *corner ring* melalui sintesis karakterisasi *nil-clean ring* yang dikemukakan oleh Diesl dengan hasil struktural Lam mengenai radikal Jacobson dan *corner ring*. Berbeda dengan penelitian-penelitian sebelumnya yang berfokus pada pembuktian sifat pewarisan untuk kelas *ring* tertentu, penelitian ini tidak bertujuan memberikan penyelesaian langsung terhadap pertanyaan terbuka Diesl. Sebaliknya, penelitian ini menawarkan suatu reformulasi struktural melalui *quotient ring* dan radikal Jacobson sehingga diperoleh suatu kerangka analisis yang lebih sistematis untuk memahami masalah pewarisan sifat pada *corner ring* serta memberikan landasan teoritis bagi penelitian selanjutnya.

METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan matematika teoretis yang didasarkan pada penalaran deduktif dalam teori *ring*. Kajian dilakukan melalui studi pustaka dengan memanfaatkan literatur yang berkaitan dengan *clean ring*, *nil-clean ring*, *corner ring*, radikal Jacobson, dan *quotient ring* sebagai landasan teoritis penelitian.

Penelitian diawali dengan mengidentifikasi definisi, proposisi, teorema, dan hasil-hasil yang telah terbukti mengenai *nil-clean ring* dan *corner ring*. Selanjutnya, dilakukan sintesis terhadap hasil-hasil tersebut melalui penggabungan karakterisasi *nil-clean ring* dengan hasil struktural mengenai radikal Jacobson dan *corner ring*. Sintesis ini digunakan untuk menganalisis hubungan struktural antara *nil-clean ring* dan *corner ring* melalui konstruksi *quotient ring*, sehingga diperoleh suatu reformulasi struktural terhadap open question mengenai pewarisan sifat *nil-clean* pada *corner ring*.

Analisis dilakukan secara deduktif dengan memanfaatkan sifat-sifat radikal Jacobson, ideal *nil*, isomorfisme *ring*, serta karakterisasi *nil-clean ring* yang telah dibuktikan sebelumnya. Penelitian ini tidak bertujuan membangun teorema baru, melainkan menyusun kembali hasil-hasil yang telah ada ke dalam suatu kerangka struktural yang terpadu untuk memberikan perspektif alternatif dalam mengkaji permasalahan pewarisan sifat *nil-clean* pada *corner ring*.

HASIL

Konsep Dasar

Sebelum mengkaji pewarisan sifat *nil-clean* pada konstruksi *corner ring*, diperlukan beberapa hasil fundamental yang menjadi landasan teoritis dalam penelitian ini. Suatu ring R disebut *nil-clean ring* apabila setiap elemennya dapat dinyatakan sebagai penjumlahan suatu elemen idempoten dan suatu elemen nilpoten (Diesl, 2013). Sementara itu, *nil* ideal merupakan ideal yang setiap elemennya bersifat nilpoten, sedangkan radikal Jacobson, yang dinotasikan dengan $J(R)$, merupakan ideal yang berperan penting dalam karakterisasi struktural suatu *ring* (Lam, 2001). Adapun jika e adalah suatu elemen idempoten di dalam R , maka himpunan $eRe = \{eRe | r \in R\}$ membentuk suatu *corner ring* dari

R . Keempat konsep tersebut saling berkaitan dan menjadi dasar dalam mereformulasikan permasalahan pewarisan sifat *nil-clean* melalui hubungan antara *corner ring*, radikal Jacobson, dan *quotient ring*.

Hasil pertama mengkarakterisasi *nil-clean ring* melalui *quotient ring* terhadap suatu *nil* ideal. Karakterisasi ini bersifat fundamental karena memungkinkan sifat *nil-clean* dianalisis melalui struktur hasil bagi apabila ideal yang digunakan merupakan *nil* ideal.

Proposisi 3.1. Misalkan R suatu *ring* dan I suatu *nil* ideal dari R . Maka R bersifat *nil-clean* jika dan hanya jika R/I bersifat *nil-clean* (Diesl, 2013).

Proposisi 3.1 memberikan suatu prinsip reduksi yang penting dalam teori *nil-clean ring*. Alih-alih mengkaji suatu *ring* secara langsung, sifat *nil-clean* dapat dipelajari secara ekuivalen melalui *quotient ring* terhadap suatu *nil* ideal. Prinsip ini akan digunakan pada analisis *corner ring* eRe setelah ditunjukkan bahwa radikal Jacobson dari *corner ring* tersebut juga merupakan *nil* ideal.

Hasil berikutnya menjelaskan perilaku radikal Jacobson pada *nil-clean ring*.

Proposisi 3.2. Jika R adalah *nil-clean ring*, maka $J(R)$ merupakan *nil* ideal (Diesl, 2013).

Proposisi 3.2 menjamin bahwa radikal Jacobson dari setiap *nil-clean ring* selalu merupakan *nil* ideal. Karena radikal Jacobson memegang peranan sentral dalam karakterisasi *nil-clean ring* yang diberikan oleh Diesl, pemahaman mengenai perilakunya pada konstruksi *corner ring* menjadi langkah penting dalam menyelidiki apakah sifat *nil-clean* dapat diwariskan ke *corner ring*.

Untuk menghubungkan radikal Jacobson suatu *ring* dengan radikal Jacobson dari *corner ring*-nya, diperlukan teorema struktural berikut yang dikemukakan oleh Lam.

Teorema 3.3. Misalkan e suatu elemen idempoten pada *ring* R , dan misalkan $J = J(R)$. Maka berlaku

$$J(eRe) = eJe,$$

dan

$$(eRe)/J(eRe) \cong \bar{e} \bar{R} \bar{e},$$

dengan $\bar{R} = R/J(R)$ dan $\bar{e}$ menyatakan hasil pemetaan e di dalam $\bar{R}$ (Lam, 2001).

Teorema 3.3 menunjukkan dua hubungan struktural yang mendasar. Pertama, teorema ini mengidentifikasi radikal Jacobson dari *corner ring* sebagai $eJ(R)e$, sehingga menjelaskan bagaimana radikal Jacobson berperilaku di bawah konstruksi *corner ring*. Kedua, teorema ini menyatakan bahwa *quotient ring* $(eRe)/J(eRe)$ isomorfik dengan *corner ring* dari *quotient ring* $R/J(R)$. Kedua hubungan tersebut membentuk jembatan struktural yang menghubungkan teori *corner ring* dari Lam dengan karakterisasi *nil-clean ring* yang dikemukakan oleh Diesl.

Secara keseluruhan, Proposisi 3.1, Proposisi 3.2, dan Teorema 3.3 membentuk kerangka teoritis bagi analisis struktural terhadap hubungan antara *nil-clean ring* dan *corner ring*. Secara khusus, ketiga hasil tersebut menunjukkan bahwa permasalahan pewarisan sifat *nil-clean* pada *corner ring* dapat direformulasikan melalui hubungan antara radikal Jacobson dan *quotient ring*.

Analisis Struktural

Berdasarkan Proposisi 3.1 mengenai karakterisasi *nil-clean ring* melalui *quotient ring*, Proposisi 3.2 mengenai sifat *nil* pada radikal Jacobson, dan Teorema 3.3 mengenai struktur radikal Jacobson pada *corner ring*, dilakukan sintesis untuk menganalisis hubungan struktural antara *nil-clean ring* dan *corner ring* yang telah dipaparkan sebelumnya kemudian disintesiskan untuk menganalisis struktur *corner ring* yang berasal dari suatu *nil-clean ring*. Analisis ini bertujuan untuk menjelaskan bagaimana karakterisasi struktural *nil-clean ring* berinteraksi dengan konstruksi *corner ring*.

Misalkan R adalah suatu *nil-clean ring* dan $e \in R$ merupakan suatu elemen idempoten. Berdasarkan Proposisi 3.2, radikal Jacobson $J(R)$ merupakan *nil* ideal. Selanjutnya, menurut Teorema 3.3 berlaku

$$J(eRe) = eJ(R)e.$$

Karena setiap elemen pada $J(R)$ bersifat nilpoten dan $eJ(R)e \subseteq J(R)$, maka setiap elemen pada $J(eRe)$ juga bersifat nilpoten. Dengan demikian, $J(eRe)$ merupakan suatu *nil ideal*.

Hasil ini memiliki peranan yang sangat penting karena Proposisi 3.1 hanya berlaku untuk *quotient ring* terhadap suatu *nil ideal*. Setelah diperoleh bahwa $J(eRe)$ merupakan *nil ideal*, Proposisi 3.1 dapat diterapkan secara langsung pada *corner ring* eRe , sehingga diperoleh ekuivalensi

$$eRe \text{ is nil-clean} \Leftrightarrow (eRe)/J(eRe) \text{ is nil-clean}.$$

Dengan demikian, pengkajian sifat *nil-clean* pada *corner ring* dapat direduksi menjadi pengkajian terhadap *quotient ring*-nya modulo radikal Jacobson. Reduksi ini menunjukkan bahwa permasalahan pewarisan sifat *nil-clean* dapat dinyatakan dalam kerangka *quotient ring* melalui hubungan struktural antara radikal Jacobson dan konstruksi *corner ring*.

Reformulasi Masalah Terbuka

Berdasarkan analisis struktural yang telah dibangun, memberikan langkah utama dalam mereformulasikan pertanyaan terbuka yang diajukan oleh Diesl. Setelah diperoleh bahwa radikal Jacobson dari *corner ring* merupakan suatu *nil ideal*, sifat *nil-clean* pada *corner ring* dapat diinterpretasikan melalui struktur *quotient ring*-nya. Berdasarkan Teorema 3.3,

$$(eRe)/J(eRe) \cong \bar{e} \bar{R} \bar{e},$$

dengan

$$\bar{R} = R/J(R).$$

Karena sifat *nil-clean* dipertahankan oleh isomorfisme *ring*, maka dengan menggabungkan Proposisi 3.1 dan Teorema 3.3 diperoleh ekuivalensi

$$eRe \text{ is nil-clean} \Leftrightarrow \bar{e} \bar{R} \bar{e} \text{ is nil-clean}.$$

Dengan demikian, pertanyaan terbuka yang diajukan oleh Diesl dapat direformulasikan sebagai persoalan untuk menentukan apakah *corner ring* dari *quotient ring* $R/J(R)$ juga mewarisi sifat *nil-clean*.

Reformulasi ini diperoleh secara langsung melalui sintesis antara karakterisasi *nil-clean ring* oleh Diesl dan deskripsi struktural *corner ring* oleh Lam. Oleh karena itu, permasalahan pewarisan sifat *nil-clean* pada *corner ring* dapat dinyatakan secara ekuivalen sebagai persoalan pewarisan sifat *nil-clean* pada *corner ring* dari *quotient ring* $R/J(R)$.

PEMBAHASAN

Analisis struktural yang disajikan dalam penelitian ini memberikan sudut pandang struktural alternatif terhadap pertanyaan terbuka Diesl mengenai pewarisan sifat *nil-clean* pada konstruksi *corner ring*. Dengan mengombinasikan karakterisasi *nil-clean ring* yang dikemukakan oleh Diesl dengan deskripsi struktural *corner ring* menurut Lam, permasalahan pewarisan tersebut dapat dirumuskan kembali melalui struktur *quotient ring* yang berkaitan dengan radikal Jacobson. Alih-alih mengkaji *corner ring* secara langsung, reformulasi ini mengalihkan fokus pembahasan pada struktur hasil baginya sehingga memberikan kerangka yang berbeda dalam memahami pewarisan sifat *nil-clean*.

Analisis yang dilakukan juga menunjukkan bahwa radikal Jacobson memiliki perilaku yang terstruktur di bawah konstruksi *corner ring*. Karena berlaku

$$J(eRe) = eJ(R)e,$$

dan $J(R)$ merupakan ideal *nil* apabila R adalah *nil-clean ring*, maka diperoleh bahwa $J(eRe)$ juga merupakan ideal *nil*. Dengan demikian, Proposisi 3.1 dapat diterapkan secara langsung pada *corner ring*, sehingga sifat *nil-clean* dari eRe dapat dikarakterisasi melalui *quotient ring*

$$(eRe)/J(eRe).$$

Hasil ini membangun keterkaitan struktural antara *corner ring* dan *quotient ring* yang menjadi landasan utama reformulasi yang diusulkan dalam penelitian ini.

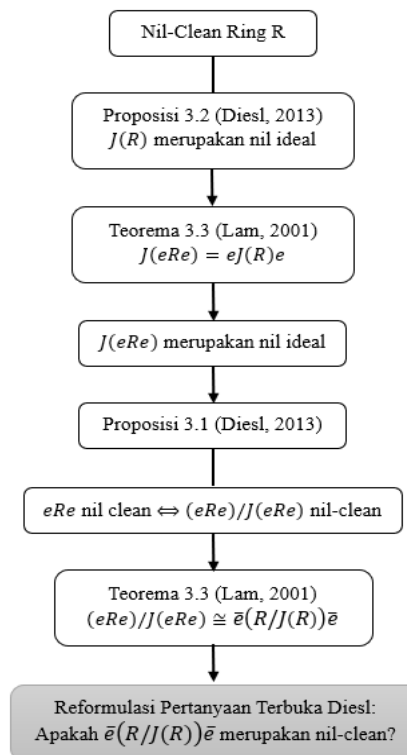
Reformulasi melalui *quotient ring* bukan sekadar konsekuensi teknis dari penggabungan dua teorema klasik, tetapi juga mencerminkan pendekatan yang lazim digunakan dalam teori *ring*. Berbagai karakterisasi struktural suatu *ring* umumnya menjadi lebih jelas setelah pengaruh radikal Jacobson dipisahkan melalui pembentukan *quotient ring*. Karena radikal Jacobson memuat komponen nilpoten yang sering kali lebih kompleks, struktur hasil bagi mampu menampilkan karakteristik aljabar yang lebih esensial. Dengan demikian, kompleksitas yang berasal dari komponen nilpotent pada radikal Jacobson tidak lagi menjadi hambatan utama dalam menganalisis pewarisan sifat *nil-clean*. Oleh karena itu, pendekatan yang dikembangkan dalam penelitian ini mereformulasikan permasalahan pewarisan semula menjadi permasalahan struktural yang ekuivalen pada *quotient ring*, di mana pengaruh radikal Jacobson telah diisolasi.

Hasil penelitian ini juga perlu dipandang dalam konteks perkembangan penelitian mengenai *corner ring* dan berbagai generalisasi *nil-clean ring*. Setelah Diesl (2013) memperkenalkan konsep *nil-clean ring* dan mengajukan pertanyaan mengenai pewarisan sifat tersebut pada *corner ring*, berbagai penelitian selanjutnya mengembangkan karakterisasi dan generalisasi konsep tersebut. Koşan dkk. (2016) memberikan karakterisasi baru bagi *strongly nil-clean ring*, yaitu bahwa suatu *ring* bersifat *strongly nil-clean* jika dan hanya jika $R/J(R)$ merupakan *ring Boolean* dan $J(R)$ merupakan ideal *nil*, serta mengkaji perilaku sifat tersebut pada beberapa konstruksi *ring*. Hasil ini semakin menegaskan pentingnya peranan radikal Jacobson dan *quotient ring* dalam memahami struktur *nil-clean* maupun *strongly nil-clean ring*. Selanjutnya, Breaz dkk. (2013) menunjukkan bahwa beberapa kelas penting *nil-clean matrix ring* memenuhi sifat pewarisan pada kondisi tertentu. Selain itu, Chen dan Sheibani (2017) menunjukkan bahwa *strongly 2-nil-clean rings* memiliki karakterisasi struktural melalui radikal Jacobson dan *quotient ring*, yang semakin menegaskan pentingnya kedua konsep tersebut dalam analisis berbagai generalisasi *nil-clean ring*. Selanjutnya, Danchev (2017) mengkaji hubungan struktural antara *complementary corner rings* dan sifat *nil-clean* global melalui *semi-Boolean rings*. Danchev (2018) kemudian membuktikan bahwa sifat *invo-clean* diwariskan pada *corner ring*, sedangkan Chen dan Sheibani (2023) menunjukkan bahwa sifat yang sama juga berlaku untuk *Yaqub nil-clean ring*. Secara keseluruhan, perkembangan tersebut menunjukkan bahwa fenomena pewarisan telah berhasil dibuktikan pada berbagai generalisasi *clean ring* dan *nil-clean ring*, meskipun permasalahan yang sama untuk *nil-clean ring* secara umum hingga kini masih belum terselesaikan.

Sudut pandang struktural yang bersifat komplementer juga dikemukakan oleh Danchev (2017), yang meninjau arah sebaliknya dengan menurunkan sifat *nil-clean* global suatu *ring* berdasarkan asumsi tertentu pada *corner ring* komplementernya. Sebaliknya, penelitian ini berangkat dari sebuah *nil-clean ring* dan mengkaji bagaimana *corner ring* yang bersesuaian dapat dianalisis melalui radikal Jacobson dan struktur *quotient ring*-nya. Meskipun kedua pendekatan tersebut mengkaji permasalahan yang berbeda, keduanya sama-sama menegaskan pentingnya *corner ring*, radikal Jacobson, dan *quotient ring* sebagai perangkat struktural dalam memahami perilaku *nil-clean ring*. Dengan demikian, kedua pendekatan tersebut saling melengkapi dalam memberikan pemahaman yang lebih komprehensif mengenai hubungan antara sifat lokal dan sifat global pada teori *ring*.

Perlu ditekankan bahwa penelitian ini tidak memberikan solusi lengkap terhadap pertanyaan terbuka yang diajukan oleh Diesl. Kontribusi utama penelitian ini tidak terletak pada pembuktian teorema baru, melainkan pada penyusunan suatu reformulasi struktural yang menyatukan karakterisasi *nil-clean ring* oleh Diesl dan teori *corner ring* menurut Lam ke dalam satu kerangka analisis yang koheren. Kerangka konseptual hasil reformulasi tersebut divisualisasikan pada Gambar 1. Diagram tersebut memperlihatkan keterkaitan logis antara Proposisi 3.1, Proposisi 3.2, dan Teorema 3.3 yang menjadi dasar dalam mereformulasikan pertanyaan terbuka Diesl melalui struktur *quotient ring*. Dengan demikian, kontribusi penelitian ini bersifat konseptual, yaitu menyatukan berbagai hasil terdahulu ke dalam suatu kerangka struktural yang secara eksplisit memperlihatkan hubungan antara *corner ring*,

radikal Jacobson, dan *quotient ring* dalam kajian *nil-clean ring*. Reformulasi ini diharapkan dapat memberikan landasan teoritis yang lebih sistematis bagi penelitian-penelitian selanjutnya.



Gambar 1. Kerangka konseptual reformulasi struktural hubungan antara *nil-clean ring*, radikal Jacobson, *corner ring*, dan *quotient ring*.

Penelitian selanjutnya dapat diarahkan pada pengujian reformulasi struktural ini pada kelas-kelas *ring* tertentu, seperti Jacobson *semisimple rings*, *upper triangular matrix rings*, maupun kelas *ring* lain yang telah diketahui memiliki sifat pewarisan untuk berbagai generalisasi *nil-clean ring*. Selain itu, kerangka struktural yang dikembangkan dalam penelitian ini dapat digunakan untuk mengidentifikasi kondisi yang menjamin pewarisan sifat *nil-clean* maupun membangun contoh tandingan apabila sifat tersebut tidak berlaku.

SIMPULAN & SARAN

Simpulan

Penelitian ini mengkaji hubungan struktural antara *nil-clean ring* dan *corner ring* melalui sintesis konsep-konsep fundamental yang dikemukakan oleh Diesl dan Lam. Hasil penelitian menunjukkan bahwa apabila R merupakan *nil-clean ring*, maka radikal Jacobson dari *corner ring* memenuhi

$$J(eRe) = eJ(R)e,$$

Akibatnya, $J(eRe)$ juga merupakan *ideal nil*. Dengan demikian, sifat *nil-clean* pada *corner ring* dapat dikarakterisasi melalui *quotient ring*

$$(eRe)/J(eRe).$$

Lebih lanjut, penelitian ini menunjukkan bahwa penentuan apakah eRe merupakan *nil-clean ring* ekuivalen dengan penentuan sifat *nil-clean* pada *corner ring* yang bersesuaian pada *quotient ring* $R/J(R)$. Temuan ini memberikan menghasilkan suatu reformulasi struktural terhadap pertanyaan terbuka yang diajukan oleh Diesl dengan menempatkan permasalahan pada kerangka *quotient ring* dan radikal Jacobson.

Meskipun penelitian ini belum memberikan penyelesaian terhadap pertanyaan terbuka tersebut, penelitian ini berhasil memperjelas hubungan struktural antara *corner ring*, radikal Jacobson, dan



quotient ring. Oleh karena itu, kontribusi utama penelitian ini terletak pada penyusunan suatu kerangka struktural yang mengintegrasikan karakterisasi *nil-clean ring* oleh Diesl dengan teori *corner ring* oleh Lam sehingga memberikan sudut pandang alternatif dalam mengkaji permasalahan pewarisan sifat *nil-clean*.

Saran

Penelitian selanjutnya dapat diarahkan pada pengujian reformulasi struktural yang diperoleh pada kelas-kelas *ring* tertentu, sehingga dapat diidentifikasi kondisi-kondisi yang menjamin pewarisan sifat *nil-clean* pada *corner ring* maupun dibangun contoh tandingan apabila sifat tersebut tidak diwariskan. Selain itu, kerangka struktural yang dikembangkan dalam penelitian ini juga berpotensi diperluas pada berbagai generalisasi *clean ring* dan *nil-clean ring* untuk memperoleh pemahaman yang lebih komprehensif mengenai perilaku pewarisan sifat pada konstruksi *corner ring*.

DAFTAR RUJUKAN

- Bisht, N. (2023). Semi-Nil Clean Rings. *Palestine Journal of Mathematics*, 12(3), 1–6.
- Breaz, S., Călugăreanu, G., Danchev, P., & Micu, T. (2013). Nil-Clean Matrix Rings. *Linear Algebra and Its Applications*, 439(10), 3115–3119. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.08.027>
- Chen, H., & Sheibani, M. (2017). Strongly 2-Nil-Clean Rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 16(9). <https://doi.org/10.1142/S021949881750178X>
- Chen, N., & Sheibani, M. (2023). On Yaqub Nil-Clean Rings. *Mathematical Reports*, 25(1), 153–165. <https://doi.org/10.59277/mrar.2023.25.75.1.153>
- Cui, J., Danchev, P., & Jin, D. (2023). Rings whose Nil-Clean and Clean Elements are Uniquely Nil-Clean. <http://arxiv.org/abs/2307.16237>
- Danchev, P. (2017). Semi-Boolean Corner Rings. *International Mathematical Forum*, 12, 795–802. <https://doi.org/10.12988/imf.2017.7655>
- Danchev, P. V. (2018). Corners of Invo-Clean Unital Rings. *Pure Mathematical Sciences*, 7(1), 27–31. <https://doi.org/10.12988/pms.2018.877>
- Diesl, A. J. (2013). Nil Clean Rings. *Journal of Algebra*, 383, 197–211. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.02.020>
- Han, J., & Nicholson, W. K. (2001). Extensions of Clean Rings. *Communications in Algebra*, 29(6), 2589–2595. <https://doi.org/10.1081/AGB-100002409>
- Koşan, T., Wang, Z., & Zhou, Y. (2016). Nil-Clean and Strongly Nil-Clean Rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 220(2), 633–646. <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2015.07.009>
- Lam, T. Y. (2001). *A First Course in Noncommutative Rings* (Vol. 131). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8616-0>
- Nicholson, W. K. (1977). Lifting Idempotents and Exchange Rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 379(9), 269–278. <https://doi.org/10.2307/1998510>
- Nicholson, W. K., & Zhou, Y. (2005). Clean Rings: A Survey. *Advances in Ring Theory*, 181–198. https://doi.org/10.1142/9789812701671_0017
- Šter, J. (2012). Corner Rings of a Clean Ring Need Not be Clean. *Communications in Algebra*, 40(5), 1595–1604. <https://doi.org/10.1080/00927872.2011.551901>