|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Vol … No … Bulan… 20…**  **Jurnal Silogisme**  **Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya**  [**http://journal.umpo.ac.id/index.php/silogisme**](http://journal.umpo.ac.id/index.php/JPK/index) | | |  |
| **Pelabelan Latis Menggunakan Metode Dilworth**  Ridho Sholehurrohman1**🖂**, Evawati Alisah2, Juhari3 | | | | |
| **Info Artikel**  **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**  ***Article History:***  *Received … 20…*  *Revised* *… 20…*  *Accepted … 20…*  **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**  ***Keywords:***  *Lattice, Laticce Graph. Labelling Graph Lattice Dilworth Method.***\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**  ***How to Cite:***  Sholehurrohman, Ridho., dkk (2024). Pelabelan Latis Menggunakan Metode Dilworth. *Jurnal Silogisme, volume*, (nomor), halaman. doi:xxxxxx atau http://dx.doi.org/xxxxxxx  (bagian halaman boleh dikosongkan) | | **Abstrak**  Latis L adalah suatu aljabar yang dikenai dua operasi biner (dilambangkan dengan dan ), yang memenuhi beberapa aksioma, yaitu kedua operasi bersifat idempoten, kedua operasi bersifat asosiatif dan komutatif, serta berlaku absorpsi terhadap relasi yang dinotasikan kedua operasi. Misal adalah latis faktor bilangan bulat positif non prima. Diagram latis dapat dipandang sebagai graf karena memenuhi definisi dari graf. Sehingga himpunan titik pada adalah semua anggota himpunan bagian dari sedemikian sehingga setiap titik yang berbeda , adalah faktor dari . Didefinikan penjumlahan dan perkalian untuk setiap adalah elemen-elemen terurut yang terhubung langsung, maka latis yang dibentuk adalah . Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui pelabelan latis menggunakan metode dilworth. Graf latis terdiri dari titik dan garis, dimana titik merupakan anggota dari latis dan garis adalah pengaitnya(sisinya). Titik dan garis dapat dipandang sebagai graf dengan tunduk terhadap definisi latis. Latis adalah latis modular, karena latis adalah latis modular, maka untuk setiap bilang bulat tidak negatif berlaku . Pelabelan graf latis dengan menggunakan teorema dilworth adalah suatu pelabelan di mana didefinisikan oleh  dimana adalah fungsi karakteristik yang memetakan ke himpunan .  ***Abstract***  *A lattice is an algebra subjected to two binary operations*  *and* *, which satisfy certain axioms: both operations are idempotent, associative, and commutative, and they fulfill the absorption law in relation to the notation of both operations. For example, is a lattice of positive non-prime integer factors. The lattice diagram*  *can be viewed as a graph because it meets the definition of a graph. Therefore, the set of vertices in consists of all members of the subset of such that for any two distinct vertices* ,  *is factor of . The addition and the multiplication*  *are defined for each . The ordered elements that are directly connected form the lattice , which is defined as . The objective of this research is to determine the labeling of the lattice using the Dilworth method. A lattice graph consists of vertices and edges, where vertices are elements of the lattice F(n) and edges are its edges. Vertices and edges can be viewed as graphs subject to the definition of a lattice. A lattice F(n) is a modular lattice, since the lattice is a modular lattice, then for every nonnegative integer it holds that . The lattice graph labeling using Dilworth's theorem is a labeling where is defined by:*  *where is a characteristic function mapping to the set*  © 2020 Universitas Muhammadiyah Ponorogo | | |
| **🖂 Alamat korespondensi:**  **Universitas Lampung1, UIN Malang2,3**  **E-mail:** [ridho.sholehurrohman@fmipa.unila.ac.id](mailto:ridho.sholehurrohman@fmipa.unila.ac.id)1 | | | **ISSN 2548-7809** **(Online)**  **ISSN 2527-6182** **(Print)** | |

**PENDAHULUAN**

Pelabelan merupakan pemetaan bijektif yang memetakan unsur himpunan titik atau memetakan unsur himpunan sisi atau memetakan titik dan sisi atau sisi ke bilangan asli.Berdasarkan unsur yang dilabeli, pelabelan dibagi menjadi tiga jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan antara himpunan titik dan himpunan sisi (Nisa dkk, 2015).

Pelabelan latis merupakan salah satu topik yang muncul dalam teori latis. Pelabelan latis merupakan pemetaan sebarang latis finite yang dihubungkan ke latis lain dengan sifat-sifat yang terpenuhi (Vijay K, 2009). Dan menurut Gretzer (2011) dikatakan suatu latis adalah poset di mana setiap pasang unsur a,b mempunyai suatu batas bawah terbesar (disajikan oleh) yang berada di dalam himpunan itu. Pelabelan dari latis L terbatas adalah suatu pemasangan himpunan titik-titik, sedemikian sehingga terhubung langsung (*adjacent*) dengan aturan aturan tertentu.

Teori latis berkembang dengan beberapa teorema yang salah satunya adalah teorema dilworth. Dalam kaitannya latis sebagai suatu order dapat dideskripsikan sebagai hubungan antara sifat komponen-komponennya. Sedangkan teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari sifat-sifat graf. Graf adalah pasangan dengan adalah himpunan tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik, dan adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di yang disebut sisi. Jika merupakan sisi dari , maka u dan v adalah titik yang terhubung langsung (Chartrand, dkk, 2016:3). Graf dapat dinamakan demikian karena dapat diwakili secara grafis, dan representasi grafis ini yang membantu dalam memahami beberapa sifat-sifatnya (Bondy dan Murty, 2008:2).

Teori latis juga mempelajari tentang diagram latis yang merupakan representasi dari latis itu sendiri. Pada penelitian sebelumnya, yang sudah dilakukan oleh Zainal Abidin (2009) membahas tentang kajian graf latis faktor bilangan prima berpangkat n dan graf latis faktor bilangan . Menjelaskan definisi dasar dan teorema-teorema pada graf latis faktor bilangan prima. Faizatul Wahidah (2017) membahas tentang homomorfisma latis, menjelaskan definisi dasar dan teorema-teorema pada latis serta hanya menjelaskan sifat-sifat homomorfisma dari latis beserta bukti dan contohnya. Dan Eka Restu (2018) membahas tentang definisi dan teorema-teorema *Eccentric-Distance Sum* pada graf dari latis himpunan kuasa. Dalam perkembangan latis, timbul praduga jika latis adalah graf maka komponen latis bisa diwarnai atau dilabeli.

Teorema dilworth adalah teorema yang paling dikenal pada teori latis. Teorema dilworth membahas rantai setiap dua unsur yang komparabel, distributif latis dilworth, batas bawah terbesar dari latis, modularitas latis, gambar graf dengan diagram hasse. Semua struktur atau motode dilworth berkaitan dengan pelabelan latis (*lattice labeling*). teorema dilworth juga akan dibahas definisi-definisi dan teroema-teorema khusus teorema dilworth pada latis. Definisi dilworth tertutup untuk mendapat batas suatu latis, jika adalah latis terbatas, berlaku dan , dimana dinotasikan bahwa , , Ji L, dan Mi L. Dan teorema *dilworth,* diberikan bilang bulat tidak negatif dan latis modular terbatas. Maka, (Gratzer, 2010:402).

Berdasarkan permasalahan di atas, penulis ingin mengetahui lebih jauh dan menganalisis tentang teori latis. Merujuk pada jurnal-jurnal ilmiah dan penelitian yang ada belum membahas tentang pelabelan bilangan bulat tak negatif pada titik atau sisi atau keduanya dengan memenuhi aturan–aturan tertentu. Maka dalam penelitian ini akan dibahas pelabelan latis untuk graf latis faktor menggunakan metode dilworth.

**METODE**

Penelitian ini merupakan penelitian literatur yang sifatnya mengkaji dan mengembangkan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya (Abidin Z. 2009, Nurul Hotmah. 2013, Faizatul Wahidah 2017), pengembangan latis dilakukan dengan pendefinisian representasi graf pada latis dan melabeli graf tersebut dengan metode dilworth. Pertama, menentukan himpunan-himpunan cover untuk masing-masing titik yang bersesuaian dengan graf latis. Kedua, menentukan hasil pemetaan dari setiap titik dibawah pemetaan dilworth. Ketiga, menggambar graf dari latis yang belum dilabelkan. Kempat, memasangkan label pada setiap titik di graf latis yang sesuai dengan hasil dari langkah kedua. Langkah terakhir, Interpretasi hasil dari pelabelan.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

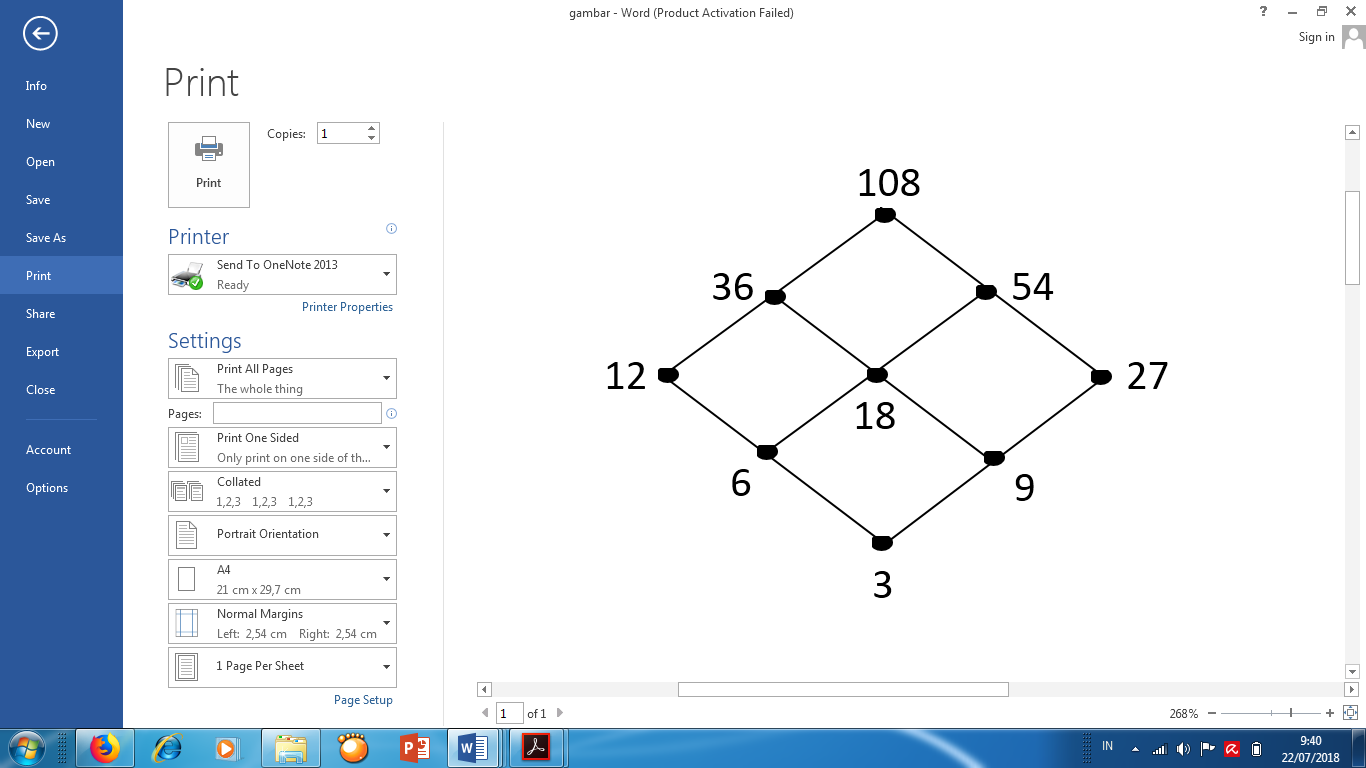
Pelabelan latis menggunakan metode dilworth adalah suatu pelabelan latis yang menggunakan konsep teorema dilworth yaitu sifat-sifat dari teorema dilworth, cara melabeli latis menggunakan metode dilworth adalah sebagai berikut.

* 1. **Menentukan Graf dari Latis Faktor Bilangan Bulat Positif Non Prima (BBPNP) yang berasal dari Diagram Latis**

Untuk menentukan bentuk umum graf dari latis faktor bilangan bulat positif non prima, terlebih dahulu diberikan contoh-contoh graf dari latis faktor bilangan bulat positif non-prima berikut:

**Contoh 1**

Latis faktor dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 1. Graf dari Latis

Pada penelitian ini latis faktor dari yang disimbolkan , sehingga latis diatas disimbolkan sebagai , dimana kita menDefinisikan dan untuk setiap , adalah faktor dari . Didefinikan penjumlahan kpk dan perhatikan fpb untuk setiap .

Diagram latis terdiri dari titik dan garis, dimana titik merupakan anggota dari latis dan garis adalah pengaitannya. Titik dan garis dapat dipandang sebagai graf dengan tunduk terhadap definisi latis. Selanjutnya graf ini diberi label dengan tunduk terhadap definisi latis dan defiisi pelabelan pada graf yang secaraspesifik mengikuti Teorema *dilworth*.

Untuk menggambar latis faktor sebagai suatu graf, diberikan beberapa proposisi dan Teorema berikut:

**Definisi 1**

Untuk , dan , didefinisikan secara rekursif himpunan faktor tingkat-m dari sebagai berikut:

**Klaim 2:**

Kardinalitas himpunan menyatakan banyaknya cabang utama di bawah pada graf latis .

**Bukti:**

Cabang utama dari adalah faktor maksimal dari , yaitu himpunan yang berakibat .

Untuk yang demikian, maka apabila dan maka , yaitu

Sehingga cabang utama dalam adalah . (Terbukti)

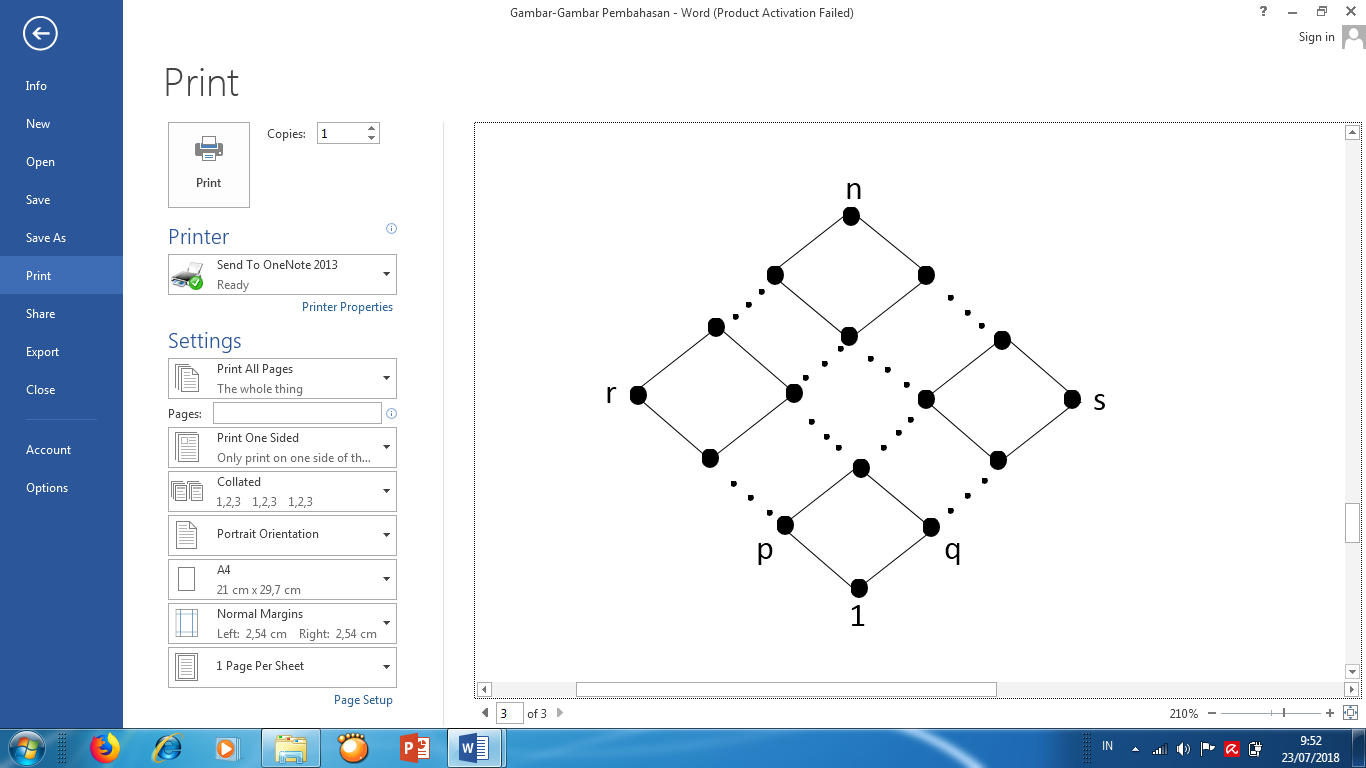
**Definisi 3:**

Untuk , dan , orde faktor atau tingkat faktor dari suatu elemen dinotasikan sebagai dan diDefinisikan sebagai berikut.

di mana adalah fungsi karakteristik yang diDefinisikan oleh:

**Teorema 4**

Apabila adalah bilangan bulat positif non-prima yang habis dibagi oleh tepat buah bilangan prima yang disimbolkan oleh dan , maka graf latis dari faktor yaitu berbentuk:



Gambar 2. Graf dari Latis dimana yang habis dibagi bilangan prima ( dan )

Dimana

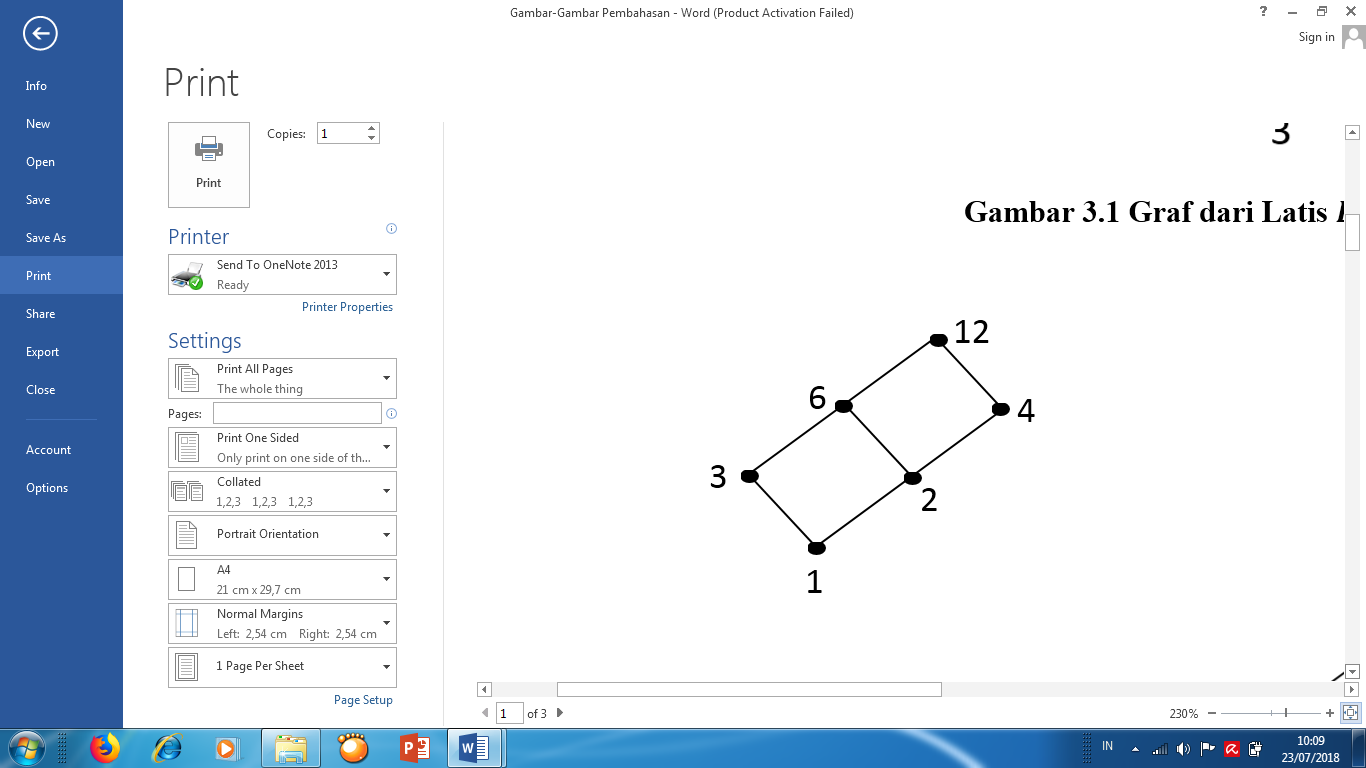
**Bukti:**

Ambil sebarang , , maka jelas bahwa sehingga berdasarkan Definisi 1, sehingga hanya memiliki satu cabang ke bawah yang juga merupakan anggota . Serupa juga untuk , , hanya memiliki satu cabang ke bawah yang juga merupakan anggota . Selanjutnya, berdasarkan Definisi 1, sehingga 1 tidak memiliki cabang ke bawah, dan untuk setiap . Sehingga, untuk selain dari anggota dan , memiliki dua buah cabang ke bawah. Dengan demikian, berbentuk seperti pada gambar 2.

Teorema diatas memberikan gambaran secara umum dari graf latis faktor dimana adalah bilangan yang habis dibagi oleh tepat buah bilangan prima.

**Contoh 2:**

Gambarlah graf dari latis



Gambar 3. Graf dari Latis

Latis adalah latis faktor dari bilangan , dimana terdapat faktor dari bilangan seperti dilukiskan dalam gambar diatas,secara terurut adalah . Latis dibangun oleh himpunan faktor dari 12, yaitu:

* 1. **Membuktikan Modularitas Latis dari Graf Latis Faktor**

Untuk melabelkan graf latis faktor dengan menggunakan theorema *dilworth*, sebagaimana dijelaskan Gratzer (2010), syarat untuk melabeli graf latis menggunakan Teorema *dilworth* adalah latis tersebut harus latis modular.

Latis modular adalah latis istimewa, latis kelas pertama dan berisi hukum modularitas, Definisi-Definisi, Teorema-Teorema, postulat-postulat yang sangat menarik untuk diteliti.

Untuk keperluan bukti membuktikan modularitas latis dari graf latis faktor , penulis menyusun Teorema latis modular dari Definisi latis pada buku (sukardjono,2002) sehingga tampak jelas, keterkaitan membuktikan modularitas latis dari graf latis faktor . Pada subbab ini kita akan membuktikan bahwa latis faktor yaitu adalah latis modular. Berikut adalah Teorema yang menyatakan modularitas dari latis faktor :

**Teorema 5**

Apabila adalah bilangan bulat positif non-prima yang habis dibagi oleh tepat buah bilangan prima yang disimbolkan oleh dan , maka latis dari faktor yaitu adalah latis modular.

**Bukti:**

Misalkan adalah bilangan bulat positif non-prima yang habis dibagi oleh tepat buah bilangan prima yang disimbolkan oleh dan . Selanjutnya ambil , sedemikian sehingga , maka sehingga

Dengan demikian,

Terbukti.

Berdasarkan Teorema diatas, terbukti bahwa latis adalah latis modular. Gratzer (2010) telah membuktikan bahwa setiap latis modular memenuhi:

untuk setiap bilang bulat tidak negatif.

Karenalatis adalah latis modular, maka untuk setiap bilang bulat tidak negatif berlaku:

Selanjutnya, diilustrasikan pelabelan graf dari latis faktor dengan menggunakan Teorema *dilworth*.

* 1. **Pelabelan pada Graf dari Latis menggunakan Metode Dilworth**

Pelabelan graf latis dengan menggunakan Teorema *dilworth* adalah suatu pelabelan di mana diDefinisikan oleh

Di mana adalah fungsi karakteristik yang diDefinisikan oleh

Untuk memahami bagaimana pelabelan *dilworth* dilakukan, berikut diberikan langkah-langkah atau algoritma untuk melabelkan graf latis faktor :

**Algoritma Pelabelan *Dilworth***

Langkah 1: Menentukan himpunan-himpunan cover untuk masing-masing   
 yang bersesuaian dengan graf latis faktor .

Langkah 2: Menentukan hasi pemetaan dari setaiap dibawah , dimana adalah anggota

Langkah 3: Menggambar graf dari latis yang belum dilabelkan

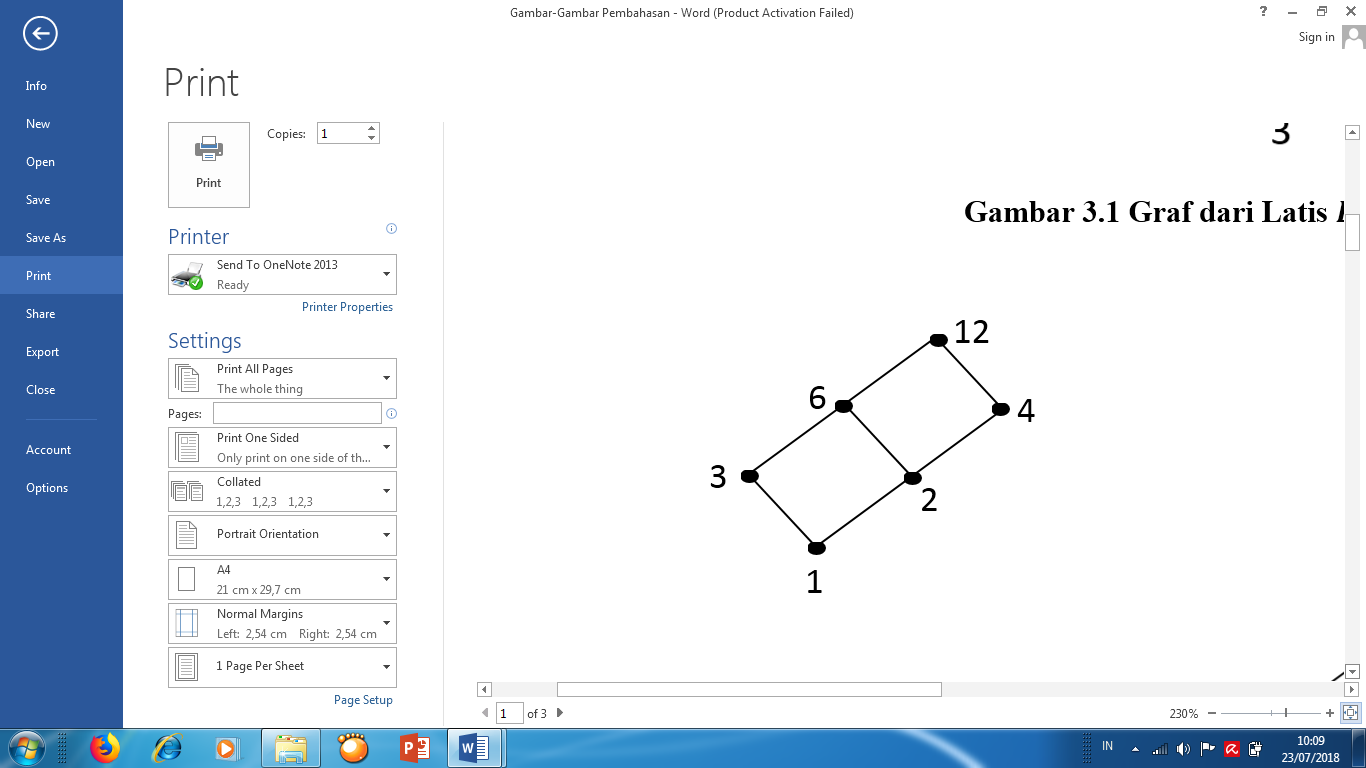
Langkah 4: Memasangkan label pada setiap titik di graf latis yang sesuai dengan hasil dari   
 Langkah 2

Langkah 5: Interpretasi hasil dari pelabelan

Sebagai ilustrasi dari pelabelan metode *dilworth* diatas, diberikan beberapa contoh berikut:

**Contoh 3.3**

Graf dari latis adalah sebagi berikut:



Gambar 4. Graf dari Latis

Penerapkan pelabelan di atas,

Untuk dan , diperoleh:

, karena

, karena

, karena

, karena

sehingga;

Untuk , dan diperoleh:

, karena

, karena

, karena

, karena

sehingga;

Untuk , diperoleh:

, karena

, karena

, karena

, karena

sehingga;

Jadi, Untuk lainnya, diberikan sebagai berikut:

,

,

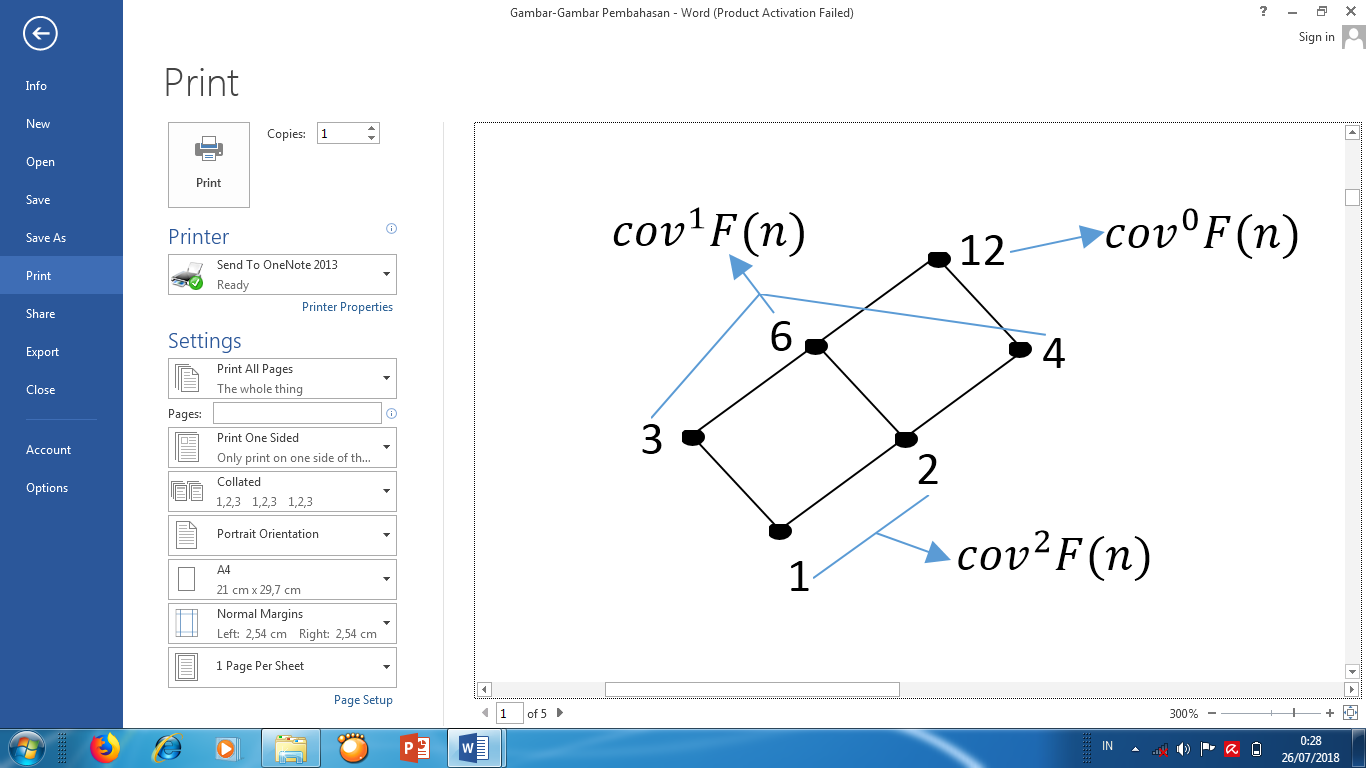
,

,

,

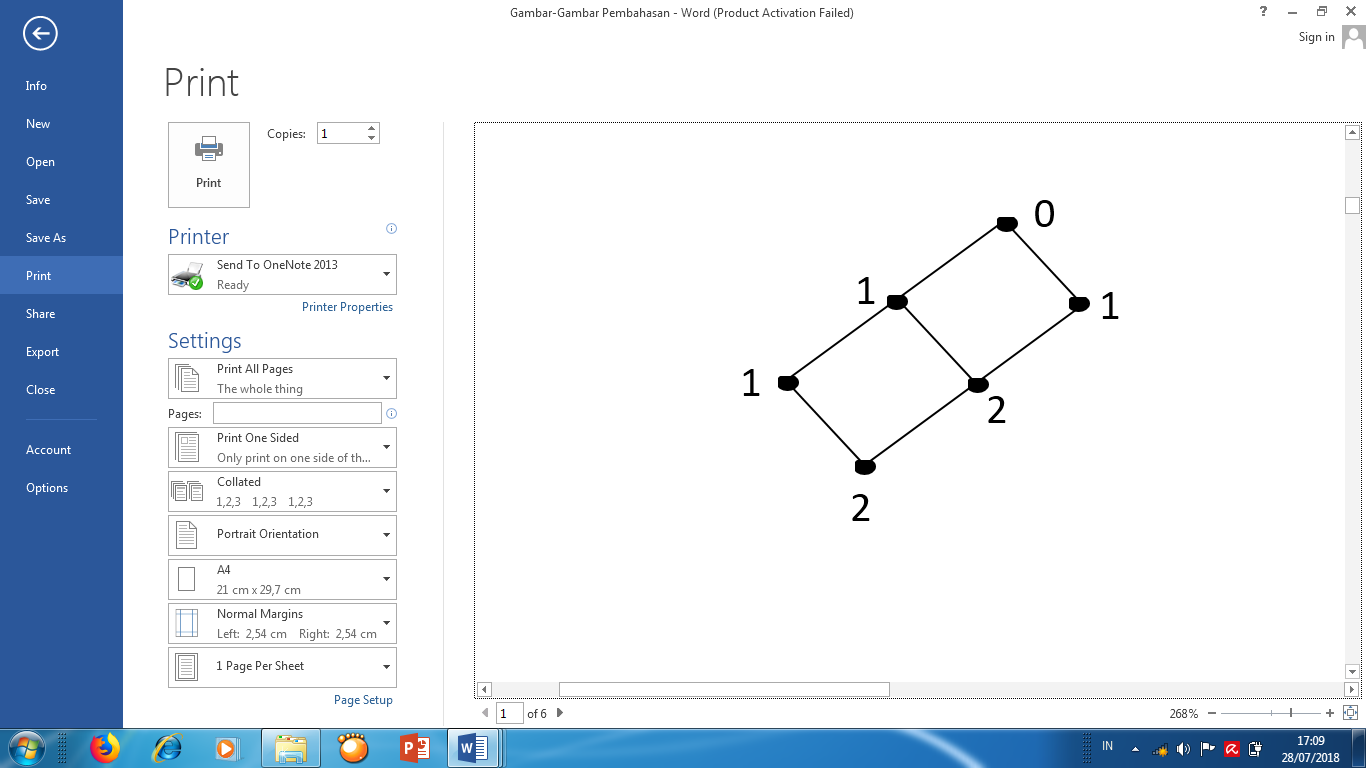
,

Gambar graf latis yang menunjukkan



Gambar 5. Graf dari Latis yang menunjukan

Setelah dilabeli, graf latis sebagai berikut:



Gambar 6 Graf dari Latis yang akan diberi Label dengan Aturan Pemetaan

Dengan demikian, pelabelan dari latis dapat mengikuti pemetaan di atas. Pelabelan pada graf dari latis menggunakan Teorema *dilworth* (cover bawah) menunjukkan bahwa terdapat titik berderajat , titik berderajat dan 1 titik berderajat .

**Lemma 6**

Apabila adalah bilangan bulat positif non-prima yang habis dibagi oleh tepat buah bilangan prima yang disimbolkan oleh dan . Maka pada latis , , dan .

**Bukti:**

Ambil sebarang , maka . Karena dan tepat habis dibagi oleh buah bilangan prima p dan q, maka terdapat sedemikian sehingga , dan dimana .

Dengan demikian, adalah kelipatan persekutuan terkecil dari dan , di mana , dan sehingga diperoleh . Tetapi karena , dan , maka haruslah .Selanjutnya, misal diasumsikan bahwa , maka haruslah , di mana , dan . Tetapi , untuk suatu dengan demikian haruslah bahwa atau . Tanpa mengurangi perumuman misalkan , kontradiksi dengan lemma sebelumnya bahwa . Sehingga terbukti bahwa . Dengan demikian .

**SIMPULAN**

Berdasarkan pembahasan diatas terdapat beberapa kesimpulan, Pelabelan menggunakan metode *dilworth* diantaranya pertama, diagram latis terdiri dari titik dan garis, dimana titik merupakan anggota dari latis dan garis adalah pengaitnya. Titik dan garis dapat dipandang sebagai graf dengan tunduk terhadap definisi latis. Kedua latis adalah latis modular, karena latis adalah latis modular, maka untuk setiap bilang bulat tidak negatif berlaku . Ketiga, pelabelan graf latis dengan menggunakan teorema *dilworth* adalah suatu pelabelan di mana diDefinisikan oleh

dimana adalah fungsi karakteristik yang didefinisikan oleh

**DAFTAR RUJUKAN**

Abidin, Z. 2009. Kajian graf latis faktor bilangan prima berpangkat n dan graf latis faktor bilangan . Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Fakultas Sains dan Teknologi. UIN-Malang.

Arifin, A. 2000. Aljabar. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Bondy, J.A dan Murty, U.S.R. 2008. *Graph Theory*. Springer: The Macmilan Press.

Chartrand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P. 2016. *Graphs & Digraphs Sixth Edition*. Boca Raton: CRC Press.

Grag.Vijay K. 2009. *Lattice Theory with Applications*. USA: Univercity of Texas.

Gratzer, G. 2011. *Lattice Theory: Foundation*. Canada: Univercity of Wanitoba.

Hotmah, Nurul. 2013. “Analisis Latis Modular pada Himpunan Matriks Bolean ”. Malang: Fakultas Sains dan Teknologi. UIN-Malang.

Mas’od. F. 2013. Struktur Aljabar. Jakarta: Akademia Permata.

Restu, Eka. 2018. “*Eccentric-Distance Sum* pada Graf dari Latis Himpunan Kuasa”. Malang : Fakultas Sains dan Teknologi. UIN-Malang.

Rutherford. 1965. *Introduction to Lattice Theory*. London: Great Britain.

Sukardjono. 2002. Teori Latis. Jogjakarta: ANDI.

Wahidah. Faizatul. 2017. Homomorfisma Latis. Malang: Fakultas Sains dan Teknologi. UIN-Malang.

Wim and Rob. 2011-13. *Dilworth’s Theorem Revisited, an algorithmic proof*. Econometric Istitute Journal (PP.11-13).