Vol 3 No 1 Bulan Juni 2018

Jurnal Silogisme

Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya

http://journal.umpo.ac.id/index.php/silogisme

KETAKSAMAAN JUMLAHAN SINUS PANGKAT 2^n YANG BELAKU PADA SEGITIGA LANCIP

Hikma Khilda Nasyiithoh ✉

Info Artikel

Article History:
Accepted April2018
Approved May 2018
Published June 2018

Keywords:
Acute triangle, radius of the circle circumscribed about a plane triangle, and the quadratic sum inequality of the sides of triangle

Abstrak

Misalkan α, β, γ adalah besar sudut pada segitiga lancip dan a, b, c adalah panjang sisi – sisi segitiga. Dengan menyatakan sin us sudut sebagai hubungan antara panjang sisi segitiga dan jari – jari lingkaran luar segitiga akan dibuktikan ketaksamaan jumlahan kuadrat sinus segitiga lancip. Selanjutnya, dengan menggunakan ketaksamaan kuadrat jumlahan sisi-sisi segitiga akan diperluas untuk kasus ketaksamaan jumlahan sinus pangkat 2^n pada segitiga lancip

Abstract

Let α, β, γ are angles in acute triangle ABC and a, b, c are the length of the triangle. By using the sine of angles as the relationship between the length of triangle and the radius of the circle circumscribed about a plane triangle, will be proven the sum inequality of quadratic sine in acute triangle. Then, by using the quadratic sum inequality of the sides of triangle will be extended for the case of the sum inequality of sine of order 2^n in acute triangle.

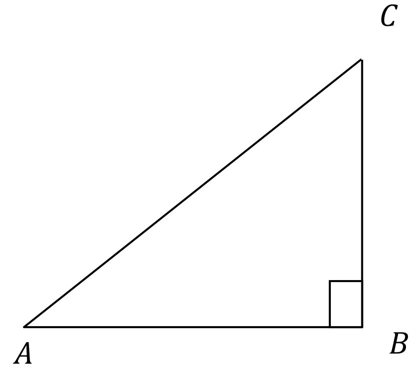
How to Cite:
Hikma Khilda Nasyiithoh (2018). Ketaksamaan jumlahan sinus pangkat 2^n yang berlaku pada segitiga lancip
Jurnal Silogisme
Universitas Muhammadiyah Ponorogo, Vol 3 No 1 : Halaman 21-27

✉ **Alamat korespondensi:**
IAIN Ponorogo
E-mail: hikmakhilda@gmail.com

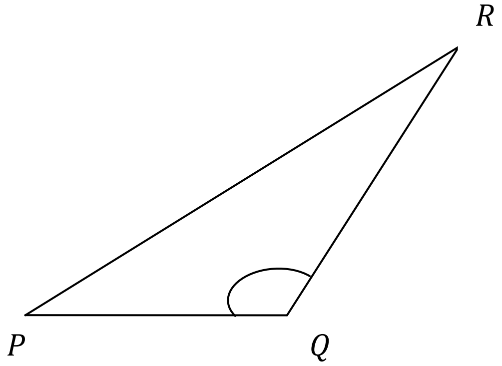
ISSN 2548-7809(Online)
ISSN2527-6182(Print)

PENDAHULUAN

Ditinjau dari besar sudutnya segitiga dibedakan menjadi tiga yaitu yang pertama segitiga siku-siku (Gambar 1) yaitu segitiga yang salah satu sudutnya siku-siku ($\angle ACB$) atau besar sudutnya $\frac{\pi}{2}$. Kedua adalah segitiga tumpul (Gambar 2) yaitu segitiga yang salah satu dari tiga sudutnya merupakan sudut tumpul ($\angle PRQ$) atau besar sudutnya antara $\frac{\pi}{2}$ dan π. Ketiga adalah segitiga lancip (Gambar 3) yaitu segitiga yang masing-masing sudutnya merupakan sudut lancip atau besar sudutnya antara 0 dan $\frac{\pi}{2}$.

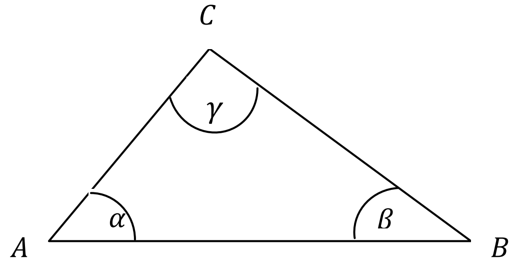


Gambar 1. Segitiga siku-siku ABC



Gambar 2. Segitiga tumpul PQR

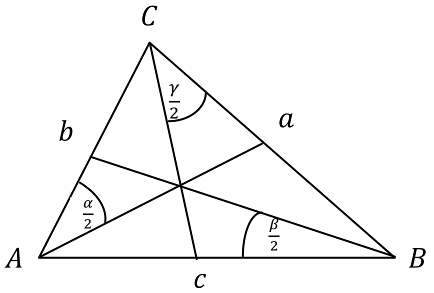
Misalkan digambarkan sebarang segitiga lancip (Gambar 3) dan α, β, γ dinyatakan sebagai sudut - sudut ΔABC dengan $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$,



Gambar 3. Segitiga lancip

maka nilai sinus, cosinus setiap sudutnya akan selalu bernilai positif atau $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$ demikian juga untuk sudut β dan γ. Oleh karena itu, ketaksamaan jumlahan maupun perkalian sinus, cosinus ketiga sudutnya akan selalu bernilai positif .

Untuk nilai dari $\cos\frac{\alpha}{2}$ dapat dinyatakan dalam hubungannya dengan $\cos\alpha$ sebagai berikut :



Gambar 4. Segitiga lancip ABC dengan garis bagi sudut

Untuk setiap sudut α merupakan sudut lancip atau $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (diilustrasikan pada Gambar 4) dan dengan menyatakan

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

maka

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Berdasarkan identitas trigonometri,

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

maka diperoleh

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\,,$$

sehingga dapat dinyatakan bahwa

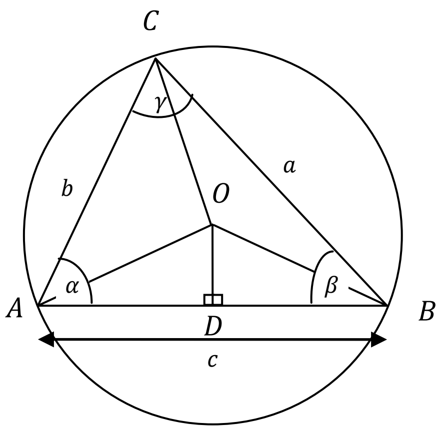
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Dengan cara yang sama, berlaku juga untuk sudut β dan γ

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}},\ \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}}.$$

(Chauvenet, 1887)

Misalkan α, β, γ merupakan sudut pada segitiga lancip, a, b, c adalah panjang sisi-sisi segitiga ABC dan terdapat lingkaran luar segitiga dengan titik pusat lingkaran O yaitu titik potong garis sumbu sisi-sisi segitiga, maka $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = R$, dengan R menyatakan panjang jari-jari lingkaran luar segitiga seperti pada gambar (4) berikut:



Gambar 4
Lingkaran luar segitiga

Berdasarkan gambar 4, diperoleh sinus sudut sebagai hubungan antara panjang sisi segitiga dan panjang jari-jari lingkaran luar segitiga yakni

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R},\ \sin\beta = \frac{b}{2R} \text{ dan } \sin\gamma = \frac{c}{2R}.$$

(Chauvenet, 1887)

Dari panjang sisi – sisi segitiga a, b, c tersebut, dengan $a \geq b \geq c$, diperoleh ketaksamaan kuadrat jumlahan sisi-sisi segitiga sebagai berikut:

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)\,.$$

(Bottema et.al, 1969)

Misalkan α, β, γ merupakan sudut segitiga lancip, maka dengan memanfaatkan lingkaran luar segitiga, aturan cosinus, dan identitas trigonometri, diperoleh

$$a^2+b^2+c^2 = 8R^2(1+\cos\alpha\ \cos\beta\cos\gamma).$$

(Bottema et.al, 1969)

ANALISIS

Pada analisis ini diberikan ketaksamaan yang berlaku pada segitiga lancip atau dengan syarat awal $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ dan $+\beta+\gamma = \pi$. Terlebih dahulu, dengan menggunakan definisi cosinus dua sudut dan identitas trigonometri $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ diperoleh

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 2\left(\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) - \sin^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

Karena $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, maka $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right) = \sin\frac{\gamma}{2}$, sehingga

$$1 + 2\left(\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) - \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$= 1 + 2\left(\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) - \sin\frac{\gamma}{2}\right)\right).$$

dengan menggunakan definisi cosinus sudut diperoleh

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

Karena sinus sudut pada segitiga lancip selalu bernilai positif, maka sinus setengah sudutnya juga akan selalu bernilai positif sehingga jelas bahwa

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > 1.$$

Selanjutnya diberikan ketaksamaan perkalian cosinus setengah sudut pada segitiga lancip atau dengan syarat awal $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ dan $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ yang tertuang pada teorema 1 berikut.

Teorema 1. *Untuk setiap segitiga lancip dengan besar sudut* α, β, γ, *berlaku*

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} > \frac{1}{2}.$$

(Bottema, 1969)

Bukti. Dengan menggunakan aturan cosinus, nilai cosinus setengah sudut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos\alpha + 1}{2}}, \quad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\cos\beta + 1}{2}}$$

dan

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\cos\gamma + 1}{2}},$$

maka

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(\cos\alpha + 1)(\cos\beta + 1)(\cos\gamma + 1)}{8}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{(\cos\alpha + 1)(\cos\beta + 1)(\cos\gamma + 1)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma \\
&\quad + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 1)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Oleh karena nilai cosinus sudut pada segitiga lancip selalu bernilai positif maka perkalian kedua dan ketiga sudutnya juga akan selalu bernilai positif atau $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma > 0$, $\cos\alpha\cos\beta > 0, \cos\alpha\cos\gamma > 0, \cos\beta\cos\gamma > 0$ dan sudah diketahui sebelumnya pada bahwa $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > 1$ sehingga

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} > \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + 1)^{1/2}$$

Dengan demikian,

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} > \frac{1}{2}.$$

■

Lebih lanjut, dengan memanfaatkan ketaksamaan perkalian cosinus setengah sudut pada segititga lancip, diperoleh ketaksamaan sebagai berikut.

Teorema 2.

Untuk setiap segitiga lancip dengan besar sudut $, \beta, \gamma$ *, berlaku*

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2.$$

(Bottema, 1969)

Bukti.

Berdasarkan definisi sinus dua sudut diperoleh

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

sehingga berdasarkan Teorema 1 didapat

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

■

Teorema 3. *Untuk setiap segitiga lancip, berlaku*

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma > 2.$$

(Bottema et.al, 1969)

Bukti. Dengan menyatakan sinus sudut sebagai hubungan antara panjang sisi segitiga dan panjang jari-jari lingkaran luar segitiga maka

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}, \qquad (i)$$

dan diketahui bahwa

$$a^2+b^2+c^2 = 8R^2(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma). \qquad (ii)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan (ii) ke (i) didapat

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma &= \frac{8R^2(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}{4R^2}\\ &= 2(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\\ &> 2.\end{aligned}$$

■

Selain ketaksamaan jumlahan sinus dan jumlahan sinus kuadrat yang berlaku pada segitiga lancip tersebut, diperoleh perluasan baru untuk ketaksamaan jumlahan sinus pangkat 2^n yang berlaku pada segitiga lancip berikut ini.

Teorema 4. *Untuk setiap segitiga lancip, berlaku*

$$\sin^{2^n}\alpha + \sin^{2^n}\beta + \sin^{2^n}\gamma > 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2^{(n-1)}},$$

dengan n bilangan asli.

Bukti.

Untuk $n = 1$,

Berdasarkan teorema 2, diketahui bahwa

$$\sin^{2^n}\alpha + \sin^{2^n}\beta + \sin^{2^n}\gamma > 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2^{(n-1)}}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma > 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2^{(1-1)}} = 2.$$

Diasumsikan benar untuk $\sin^{2^n}\alpha + \sin^{2^n}\beta + \sin^{2^n}\gamma > 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2^{(n-1)}}$,

akan dibuktikan benar untuk $\sin^{2^{(n+1)}}\alpha + \sin^{2^{(n+1)}}\beta + \sin^{2^{(n+1)}}\gamma > 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2^n}$.

$$\begin{aligned}\sin^{2^{(n+1)}}\alpha + \sin^{2^{(n+1)}}\beta + \sin^{2^{(n+1)}}\gamma &= \sin^{2\cdot 2^n}\alpha + \sin^{2\cdot 2^n}\beta + \sin^{2\cdot 2^n}\gamma\\ &= \left(\sin^{2^n}\alpha\right)^2 + \left(\sin^{2^n}\beta\right)^2 + \left(\sin^{2^n}\gamma\right)^2.\end{aligned}$$

Dengan menggunakan ketaksamaaan kuadrat jumlahan segitiga, untuk $a = \sin^{2^n}\alpha,\ b = \sin^{2^n}\beta$, dan $c = \sin^{2^n}\gamma$ diperoleh

$$\left(\sin^{2^n}\alpha\right)^2 + \left(\sin^{2^n}\beta\right)^2 + \left(\sin^{2^n}\gamma\right)^2 \geq \frac{\left(\sin^{2^n}\alpha + \sin^{2^n}\beta + \sin^{2^n}\gamma\right)^2}{3}.$$

Sehingga,

$$\left(\sin^{2^n}\alpha\right)^2+\left(\sin^{2^n}\beta\right)^2+\left(\sin^{2^n}\gamma\right)^2>\frac{\left(3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{(n-1)}}\right)^2}{3}=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2\cdot 2^{(n-1)}}$$
$$=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{(n-1)+1}}=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2^n}.$$

■

SIMPULAN & SARAN

Simpulan

Untuk setiap segitiga lancip dengan besar sudut , β,γ , berlaku

1) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>2.$
2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma>2.$
3) $\sin^{2^n}\alpha+\sin^{2^n}\beta+\sin^{2^n}\gamma>3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{(n-1)}}$

Saran

Dari ketaksamaan sinus yang berlaku pada segitiga lancip di atas, masih dapat dilakukan penelitian untuk mendapatkan perluasan ketaksamaan trigonometri yang lain.

DAFTAR RUJUKAN

Bottema, O., Djordjivic, R.Z., Janic, R.R., Mitrincvic, D.S., Vasic, P.M. 1969. *Geometric Inequalities*. Wolters-Noordhoff Publishing Groningen, The Netherlands.

Chauvenet, William. 1887. *A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry*. J. B. Lippincott Company, Philadelphia.