Vol 2 No 2 Bulan Desember 2017
Jurnal Silogisme
Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya
http://journal.umpo.ac.id/index.php/silogisme

IDEAL PRIMA FUZZY DI SEMIGRUP S

Abdurahim[1]✉

Info Artikel

Article History:
Accepted November 2017
Approved November 2017
Published Desember 2017

Keywords:
Semigroup, fuzzy, fuzzy ideals, fuzzy prime ideals

How to Cite:
Abdurahim (2017). Ideal Prima Fuzzy di Semigrup S, Jurnal Silogisme Universitas Muhammadiyah Ponorogo, Vol 2 No 2 : 46-55

Abstrak

Fungsi keanggotaan fuzzy merupakan fungsi yang memetakan himpunan tak kosong X ke interval tertutup $[0,1]$. Selanjutnya, jika domain fungsi tersebut diganti dengan semigrup, maka fungsi tersebut dinamakan subhimpunan fuzzy. Subhimpunan fuzzy yang memetakan S ke 1 dinotasikan dengan C_S. Subhimpunan fuzzy f disebut ideal fuzzy jika memenuhi $C_S \circ f \subseteq f$ dan $f \circ C_S \subseteq f$. Selanjutnya f disebut ideal prima fuzzy jika untuk setiap ideal fuzzy g dan h yang memenuhi $g \circ h \subseteq f$ berakibat $g \subseteq f$ atau $h \subseteq f$. Pada penelitian ini akan dikaji karakteristik dari ideal prima fuzzy beserta beberapa contoh dari karakteristik tersbut.

Abstract

A fuzzy membership function is a function that maps the nonempty set X to a closed interval $[0,1]$. Furthermore, if the function domain is replaced with a semigroup, then the function is called fuzzy subset. A fuzzy subset mapping S to 1 is denoted by C_S. A fuzzy subset f is called fuzzy ideal if it satisfies both $C_S\, o \circ f \subseteq f$ and $f \circ C_S \subseteq f$. Moreover, f is called a fuzzy prime ideal if for any fuzzy ideal g and h, with $g \circ h \subseteq f$ implies $g \subseteq f$ or $h \subseteq f$. In this paper be investigated about some characteristics of prime fuzzy ideals and some example of them.

✉ **Alamat korespondensi:**
Instansi STMIK Bumigora Mataram[1]
E-mail: aim.math13@gmail.com[1]

ISSN 2548-7809 (Online)
ISSN 2527-6182 (Print)

PENDAHULUAN

Himpunan fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh Lotfi A. Zadeh, seorang guru besar di *University of California, Barkeley* Amerika Serikat, tahun 1965 pada tulisannya yang berjudul *Fuzzy Sets*. Dalam tulisannya, Zadeh memperluas konsep himpunan klasik. Himpunan didefinisikan sebagai suatu koleksi obyek yang terdefinisi dengan tegas, dalam arti bahwa dapat ditentukan secara tegas apakah suatu objek merupakan anggota himpunan atau bukan. Dengan demikian, suatu himpunan A dalam semesta X dapat didefinisikan dengan menggunakan suatu fungsi yaitu $C_A : X \to \{0,1\}$ yang disebut fungsi karakteristik dari himpunan A. Dengan memperluas konsep fungsi karakteristik, (Zadeh, 1965) mendefinisikan himpunan fuzzy menggunakan fungsi keanggotaan yang nilainya berada dalam selang tertutup [0,1]. Jadi, keanggotaan dalam himpunan fuzzy tidak lagi seperti pada himpunan klasik yaitu apakah merupakan anggota atau bukan, melainkan suatu yang memiliki derajat dalam interval tertutup [0,1] (Setiadji, 2009).

Setelah Zadeh memperkenalkan teori himpunan fuzzy, banyak peneliti mengaplikasikan konsep fuzzy ini untuk mengembangkan beberapa dugaan/ide dasar pada aljabar. Salah satunya Rosenfeld mengaplikasikan himpunan fuzzy ke dalam teori struktur aljabar fuzzy yang merupakan pengembangan dari teori struktur aljabar dengan teori himpunan fuzzy. Rosenfeld mengaplikasikan konsep teori himpunan fuzzy ke dalam teori semigrup dan grup (Rosenfeld, 1971).

Salah satu konsep yang dipelajari dalam struktur aljabar adalah grup. Jika aksioma eksistensi elemen identitas dan eksistensi invers terhadap operasi biner pada grup dihilangkan, maka terbentuk struktur aljabar baru yang disebut semigrup. Dalam perkembangannya, tulisan dan pembahasan tentang semigrup banyak ditemukan di dalam berbagai buku atau literatur matematika. Salah satu penulis buku tentang semigrup yaitu Howie mendefinisikan semigrup S sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang bersifat asosiatif (Howie, 1995).

Jika S adalah sebuah semigrup dan $\emptyset \neq B \subseteq S$, maka B disebut subsemigrup dalam S jika himpunan B tertutup terhadap operasi biner yang sama dengan operasi biner di S. Selanjutnya, himpunan tak kosong B disebut ideal kiri (kanan) jika $SB \subseteq B$ $(BS \subseteq B)$ dan disebut ideal dua sisi (singkatnya disebut ideal) di S jika B adalah ideal kiri dan kanan (Clifford, 1961).

Penelitian tentang ideal fuzzy sudah banyak dilakukan, antara lain oleh Kuroki (1991) meneliti tentang sifat-sifat ideal (bi-ideal) kiri fuzzy, ideal (bi-ideal) kanan fuzzy dan ideal (bi-ideal) fuzzy. Lebih jauh, Kuroki dalam tulisannya menunjukkan bahwa semigrup S semisimpel jika dan hanya jika setiap ideal fuzzy S idempoten (Kuroki, 1991). Selanjutnya Ahsan mengenalkan ide dari ideal prima dalam semigrup S dan menunjukkan bahwa S semigrup semisimpel jika dan hanya jika setiap ideal fuzzynya merupakan irisan dari ideal-ideal prima fuzzy (Ahsan, 1995).

Dalam tulisan ini akan dikaji karakteristik ideal prima fuzzy yang merujuk dari (Wu,-) dan (Kim, 2009). Selanjutnya, diberikan contoh bagaimana menggunakan karakteristik ideal prima fuzzy.

Fungsi karakteristik dari himpunan A dapat diperluas menjadi fungsi keanggotaan fuzzy yang memetakan himpunan tak kosong X ke interval tertutup $[0,1]$. Selanjutnya, dengan mengganti domain fungsinya yaitu himpunan X dengan semigrup S, didefinisikan suatu fungsi yang disebut subhimpunan fuzzy, yaitu $f : S \to [0,1]$.

Diberikan himpunan $S \neq \emptyset$. Misalkan f dan g merupakan subhimpunan fuzzy dari S. Didefinisikan subhimpunan-subhimpunan fuzzy dari S yaitu $f \cap g$, dan $f \cup g$ sebagai :

$$(f \cap g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$
$$(f \cup g)(x) = \text{maks}\{f(x), g(x)\}$$

Selanjutnya, pada tulisan ini irisan dan gabungan subhimpunan fuzzy akan dinotasikan berturut-turut dengan $(f \cap g)(x) = f(x) \wedge g(x)$ dan $(f \cup g)(x) = f(x) \vee g(x)$, untuk setiap $x \in S$. Kemudian untuk produk (kompoisis) dari dua subhimpunan fuzzy f dan g, dinotasikan dengan f o g, didefinisikan sebagai :

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \bigvee_{x=yz} f(y) \wedge g(z), \text{jika}(\exists y, z \in S)(x = yz) \\ 0, \text{lainnya.} \end{cases}$$

Diberikan semigrup S dan subhimpunan fuzzy f, g dan h pada S. Jika $f \subseteq g$ maka $f \circ h \subseteq g \circ h$ dan $h \circ f \subseteq h \circ g$.

Diberikan semigrup S. Subhimpunan fuzzy f pada semigrup S merupakan subsemigrup fuzzy jika dan hanya jika $f(xy) \geq f(x) \wedge f(y)$ untuk setiap $x, y \in S$.

Diberikan semigrup S. Subhimpunan fuzzy tak kosong f disebut ideal kiri (kanan) fuzzy pada S jika $C_S \circ f \subseteq f (f \circ C_S \subseteq f)$. Selanjutnya f disebut ideal fuzzy jika f ideal kiri dan kanan fuzzy. Selanjutnya diberikan karakteristik suatu ideal fuzzy pada semigrup S. Diberikan semigrup S. Subhimpunan fuzzy tak kosong f pada S merupakan ideal kiri (kanan) fuzzy jika dan hanya jika $f(xy) \geq f(y)$ $(f(xy) \geq f(x))$ untuk setiap $x, y \in S$. Semigrup S dapat dipandang sebagai subhimpunan fuzzy atas dirinya sendiri dan ditulis $S = C_S$ yaitu $S(x) = 1$ untuk setiap $x \in S$.

Diberikan semigrup S. Jika f subhimpunan fuzzy tak kosong pada S, maka $C_S \circ f (f \circ C_S)$ merupakan ideal kiri (kanan) fuzzy pada S. Dan jika f ideal kanan (kiri) fuzzy pada S, maka $f \cup (C_S \circ f)$ $(f \cup (f \circ C_S))$ merupakan ideal pada S.

METODE

Metode yang digunakan dalam penyusunan penelitian ini adalah dengan melakukan studi literatur. Penelitian ini diawali dengan mempelajari konsep semigrup dan himpunan fuzzy, khususnya fungsi keanggotaan himpunan fuzzy. Selanjutnya apabila domain dalam fungsi keanggotaan fuzzy diganti dengan semigrup, fungsi keanggotaan yang dikenal dengan subhimpunan fuzzy. Pada subhimpunan fuzzy dikenal konsep ideal kanan fuzzy atau ideal kiri fuzzy. Jika subhimpunan fuzzy tersebut merupakan ideal kanan dan kiri fuzzy, maka subhimpunan fuzzy tersebut disebut ideal fuzzy. Konsep ideal fuzzy ini yang menjadi dasar untuk mengkaji karakteristik ideal prima fuzzy. Metode atau langkah-langkah yang dipelajari dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mempelajari subhimpunan fuzzy yang akan digunakan untuk mengkaji ideal fuzzy
2. Mempelajari sifat-sifat ideal fuzzy yang akan digunakan menyelidiki sifat-sifat pendukung ideal prima fuzzy
3. Mempelajari sifat-sifat ideal prima fuzzy yang digunakan untuk menyelediki karakteristik ideal prima fuzzy.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Lemma 1 Diberikan semigrup S. Jika $A, B \subseteq S$, maka untuk sebarang $t \in (0,1]$, berlaku pernyataan berikut.

1. $tC_A \circ tC_B = tC_{AB}$.
2. $tC_A \cap tC_B = tC_{A \cap B}$.
3. $tC_A = \bigcup_{a \in A} a_t$.
4. $S \circ tC_A = tC_{SA}$.
5. Jika A ideal (ideal kanan, ideal kiri) di S, maka tC_A adalah ideal fuzzy (ideal kanan fuzzy, ideal kiri fuzzy) pada S.

Lemma 2 Diberikan semigrup S. Untuk sebarang $x, y \in S$, berlaku

$$\begin{aligned}\langle x \rangle \langle y \rangle &\subseteq xy \cup xyS \cup xSy \cup Sxy \cup SxyS \\ &\cup SxSy \cup SxSyS.\end{aligned}$$

Definisi 3 Diberikan semigrup S. Ideal fuzzy f pada semigrup S disebut ideal prima fuzzy pada S jika untuk setiap ideal fuzzy g, h pada S yang memenuhi $g \circ h \subseteq f$ berakibat $g \subseteq f$ atau $h \subseteq f$.

Akibat 4 Diberikan semigrup S dan I ideal di S. Jika f ideal prima fuzzy pada S, maka C_I ideal prima di S.

Bukti. Misal I ideal di S, maka berdasarkan Lemma 3.1 (5), C_I ideal fuzzy di S. Ambil sebarang f dan g ideal fuzzy pada S sedemikian hingga $f \circ g \subseteq C_I$. Jika $f \nsubseteq C_I$, maka terdapat titik fuzzy $x_t \subseteq f$ dengan $t > 0$ sedemikian hingga $x_t \nsubseteq C_I$. Untuk sebarang $y_r \subseteq g$ dengan $r > 0$, diperoleh

$$\langle x_t \rangle \circ \langle y_r \rangle \subseteq f \circ g \subseteq C_I$$

Sehingga untuk setiap $z \in S$, diperoleh

$$\langle x_t \rangle \circ \langle y_r \rangle(z) = \begin{cases} t \wedge r, z \in \langle x \rangle \langle y \rangle \\ 0, \text{lainnya.} \end{cases}$$

Karena $\langle x_t \rangle \circ \langle y_r \rangle(z) \leq C_I(z)$ untuk setiap $z \in S$, artinya $z \in \langle x \rangle \langle y \rangle$ dan $z \in I$, maka $\langle x \rangle \langle y \rangle \subseteq$ I. Berdasarkan hipotesis, diperoleh $\langle x \rangle \subseteq$ I atau $\langle y \rangle \subseteq$ I. Karena $x_t \nsubseteq C_I$, diperoleh $x \notin I$ sehingga berakibat $\langle x \rangle \nsubseteq I$. an $z \in I$, maka $\langle x \rangle \langle y \rangle \subseteq I$. Berdasarkan hipotesis, diperoleh $\langle x \rangle \subseteq I$ atau $\langle y \rangle \subseteq I$. Karena $x_t \nsubseteq C_I$, diperoleh $x \notin I$ sehingga berakibat $\langle x \rangle \nsubseteq I$. Oleh karena itu, $\langle y \rangle \subseteq I$, yang berakibat $\langle y_r \rangle \subseteq C_I$. Karena $y_r \subseteq \langle y_r \rangle$, maka $y_r \subseteq C_I$. Jadi, $g = \bigcup_{y_r \subseteq g} y_r \subseteq C_I$.

Sebaliknya, ambil sebarang ideal A dan B di S sedemikian hingga $AB \subseteq I$. Akan dibuktikan $A \subseteq I$ atau $B \subseteq I$. Berdasarkan Lemma 3.1, didapat C_A dan C_B merupakan ideal fuzzy pada S dan $C_A \circ C_B = C_{AB} \subseteq C_I$. Berdasarkan hipotesis, diperoleh $C_A \subseteq C_I$ atau $C_B \subseteq C_I$.

Jadi, $A \subseteq I$ atau $B \subseteq I$. ■

Lemma 5 Diberikan semigrup S. Jika f ideal prima fuzzy pada S, maka $|\text{Im}(f)| = 2$.

Bukti. Diasumsikan f ideal prima fuzzy yang tak konstan, diperoleh $|Im(f)| \geq 2$. Misal $|Im(f)| \geq 3$, maka terdapat $x, y, z \in S$ sedemikian hingga $f(x), f(y), f(z)$ yang berbeda. Tanpa mengurangi perumuman, diasumsikan $f(x) < f(y) < f(z)$. Ambil $r, t \in (0,1)$ sedemikian hingga $f(x) < r < f(y) < t < f(z)$. Maka untuk setiap $u \in S$, diperoleh

$$\langle x_r \rangle \circ \langle y_t \rangle(u) = \begin{cases} r \wedge t, u \in \langle x \rangle \langle y \rangle \\ 0, lainnya. \end{cases}$$

Jika $u \notin \langle x \rangle \langle y \rangle$, maka jelas memenuhi $\langle x_r \rangle \circ \langle y_t \rangle \subseteq f$. Jika $u \in \langle x \rangle \langle y \rangle$, maka berdasarkan Lemma 3.2 terdapat $s_1, s_2, \dots, s_{10} \in S$ sedemikian hingga $u = xy$ atau $u = xys_1$ atau $u = xs_2y$ atau $u = s_3xy$ atau $u = s_4xys_5$ atau $u = s_6xs_7y$ atau $u = s_8xs_9ys_{10}$. Perhatikan bahwa jika $u = s_8xs_9ys_{10}$ dan karena f ideal fuzzy, maka $f(u) = f(s_8xs_9ys_{10}) \geq f(x)$ dan $f(s_8xs_9ys_{10}) \geq f(y)$. Diperoleh

$$f(u) = f(s_8xs_9ys_{10}) \geq f(x) \vee f(y) = f(y) \quad > r = r \wedge t = \langle x_r \rangle \circ \langle y_t \rangle(u).$$

Dengan cara yang sama, untuk $u = xy$, $u = xs_2y$, $u = s_3xy$, $u = s_4xys_5$ atau $u = s_6xs_7y$, diperoleh $\langle x_r \rangle \circ \langle y_t \rangle(u) \subseteq f$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa berlaku $\langle x_r \rangle \circ \langle y_t \rangle \subseteq f$. Karena f ideal prima fuzzy pada S berakibat $\langle x_r \rangle \subseteq f$ atau $\langle y_t \rangle \subseteq f$. Jika $\langle x_r \rangle \subseteq f$, maka $f(x) \geq \langle x_r \rangle(x) = r$. Hal ini tidak mungkin. Jika $\langle y_t \rangle \subseteq f$, maka $f(x) \geq \langle y_t \rangle(x) = t$. Hal ini tidak mungkin juga. Jadi, haruslah $|Im(f)| = 2$. ■

Contoh berikut ini akan menunjukkan bahwa secara umum konvers dari Teorema 5 tidak berlaku.

Contoh 6. Diberikan semigrup S dengan operasi # yang didefinisikan sebagai berikut

$*$	a	b
a	a	b
b	b	b.

Selanjutnya didefinisikan ideal fuzzy $f : S \to [0,1]$ oleh $f(a) = 0{,}4$ dan $f(b) = 0{,}6$. Akan ditunjukkan bahwa f bukan ideal prima fuzzy pada S. Pilih ideal fuzzy g dan h yang didefinisikan sebagai berikut $g(a) = 0{,}5$, $g(b) = 0{,}6$, $h(a) = 0{,}2$, dan $h(b) = 0{,}7$. Perhatikan,

$$(g \circ h)(a) = \bigvee \big(g(a) \wedge h(a)\big) = 0{,}2 \leq f(a)$$

$$(g \circ h)(b) = \bigvee \big(g(a) \wedge h(b), g(b) \wedge h(a), g(b) \wedge h(b)\big) = 0{,}6 \leq f(b)$$

Di sisi lain, diperoleh $g(a) = 0{,}5 \nleq 0{,}4 = f(a)$ yang berakibat $g \nsubseteq f$ dan $h(b) = 0{,}7 \nleq 0{,}6 = f(b)$ yang berakibat $h \nsubseteq f$. Dengan kata lain terdapat ideal fuzzy g dan h sedemikian hingga $g \circ h \subseteq f$ tapi $g \nsubseteq f$ dan $h \nsubseteq f$. Jadi, f bukan ideal prima fuzzy pada S.

Teorema 7 Diberikan semigrup S. Jika f ideal prima fuzzy pada S, maka terdapat $x_0 \in S$ sedemikian hingga $f(x_0) = 1$.

Bukti. Andaikan $f(x) < 1$, untuk setiap $x \in S$. Berdasarkan Lemma 3.6, diperoleh $|\mathrm{I}m(f)| = 2$, misal $|\mathrm{I}m(f)| = \{t, s\}$ dengan $t < s < 1$. Jadi, terdapat $x, y \in S$ dan $m \in (0,1]$ sedemikian hingga $f(x) = t < s = f(y) < m \leq 1$. Ambil $t_1, t_2 \in (0,1)$ sedemikian hingga $t < t_1 < s < t_2 < m$. Maka dengan cara yang sama dengan bukti Lemma 3.6, diperoleh $\langle x_{t_1} \rangle \circ \langle y_{t_2} \rangle \subseteq f$. Karena f ideal prima fuzzy pada S, berakibat $\langle x_{t_1} \rangle \subseteq f$ atau $\langle y_{t_2} \rangle \subseteq f$. Sehingga diperoleh $f(x) \geq t_1$ atau $f(y) \geq t_2$. Hal ini tidak mungkin. Jadi haruslah terdapat $x_0 \in S$ sedemikian hingga $f(x_0) = 1$. ■

Misal diberikan semigrup S dan f subhimpunan fuzzy pada S. Dapat didefinisikan t-*cut* atau himpunan tingkat (*level set*) f_t yaitu $f_t = \{x \in \mathrm{S} | f(x) \geq t\}$.

Contoh berikut ini akan menunjukkan bahwa secara umum konvers dari Teorema 7 tidak berlaku.

Contoh 8. Diberikan semigrup S dengan operasi # yang didefinisikan sebagai berikut

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	c	c	c
c	c	c	c	$c.$

Selanjutnya didefinisikan ideal fuzzy $f : S \to [0,1]$ oleh $f(a) = 0{,}4$, $f(b) = 0{,}4$, $f(c) = 1$, dan $f(d) = 0{,}6$. Akan ditunjukkan bahwa f bukan ideal prima fuzzy pada S. Pilih ideal fuzzy g dan h yang didefinisikan sebagai berikut $g(a) = g(b) = 0{,}5$, $g(c) = 0{,}8$, $g(d) = 0{,}7$, $h(a) = h(b) = 0{,}3$, $h(c) = 0{,}9$, dan $h(d) = 0{,}8$. Perhatikan,

$$(g \circ h)(a) = \bigvee \big(g(a) \wedge h(a), g(b) \wedge h(a)\big) = 0{,}3 \leq f(a)$$

$$(g \circ h)(b) = \bigvee \big(g(a) \wedge h(b), g(b) \wedge h(b)\big) = 0{,}3 \leq f(b)$$

$$(g \circ h)(c) = \bigvee \big(g(a) \wedge h(c), g(b) \wedge h(c), g(c) \wedge h(a), g(c) \wedge h(b), g(c) \wedge h(c), g(c) \wedge h(d), g(d) \wedge h(a), g(d) \wedge h(b), g(d) \wedge h(c), g(d) \wedge h(d)\big) = 0{,}8 \leq f(c)$$

$$(g \circ h)(b) = \bigvee \big(g(a) \wedge h(d), g(b) \wedge h(d)\big) = 0{,}5 \leq f(d)$$

Di sisi lain, diperoleh $g(a) = 0{,}5 \nleq 0{,}4 = f(a)$ yang berakibat $g \nsubseteq f$ dan $h(d) = 0{,}8 \nleq 0{,}6 = f(d)$ yang berakibat $h \nsubseteq f$. Dengan kata lain terdapat ideal fuzzy g dan h sedemikian hingga $g \circ h \subseteq f$ tapi $g \nsubseteq f$ dan $h \nsubseteq f$. Jadi, f bukan ideal prima fuzzy pada S.

Sebelum beralih ke karaktristik ideal prima fuzzy, diberikan lemma yang akan digunakan untuk mendukung pada pembuktian karakteristik.

Lemma 9 Diberikan semigrup S dan himpunantingkat f_1 dengan f ideal fuzzy pada S. Jika $xSy \subseteq f_1$ maka $(SxS)(SyS) \subseteq f_1$ untuk setiap $x, y \in S$.

Bukti. Ambil sebarang $x, y \in S$. Andaikan $(SxS)(SyS) \nsubseteq f_1$, maka terdapat $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$ sedemikian hingga $s_1xs_2s_3ys_4 \notin f_1$ atau ekuivalen dengan menyatakan $f(s_1xs_2s_3ys_4) \neq 1$. Karena f ideal fuzzy, diperoleh $1 \neq f(s_1xs_2s_3ys_4) \geq f(xs_2s_3y) = f(xs_5y)$ dengan $s_5 = s_2s_3$. Jadi, $xs_5y \notin f_1$ atau dengan kata lain xSyÚf_1. Oleh karena itu, terbukti bahwa jika $xSy \subseteq f_1$, maka $(SxS)(SyS) \subseteq f_1$. ∎

Teorema 10 Diberikan semigrup S.Jika f ideal fuzzy pada S, maka f ideal prima fuzzy pada S jika dan hanya jika memenuhi kondisi sebagai berikut :

1. $|\mathrm{Im}(f)| = 2$.
2. $f_1 \neq \emptyset$ dan f_1 ideal prima di S.

Bukti. ($\Rightarrow$) Ambil f ideal prima fuzzy pada S. Maka berdasarkan Lemma 3.6 diperoleh $|Im(f)| = 2$, berdasarkan Teorema 3.7 diperoleh $f_1 \neq \emptyset$, dan berdasarkan Akibat 3.5 diperoleh f_1 ideal prima di S. Jadi, (1) dan (2) terpenuhi.
Akan ditunjukkan f ideal prima fuzzy. Ambil sebarang g dan h ideal fuzzy pada S sedemikian hingga $g \circ h \subseteq f$. Andaikan $g \nsubseteq f$ dan $h \nsubseteq f$, maka terdapat $x, y \in S$ sedemikian hingga $g(x) > f(x)$ dan $h(y) > f(y)$. Jadi, $x, y \notin f_1$.
Klaim : $xSy \nsubseteq f$. Andaikan $xSy \subseteq f$, berdasarkan Lemma 3.8 diperoleh $(SxS)(SyS) \subseteq f_1$. Karena SxS dan SyS ideal dan f_1 ideal prima di S, didapat $SxS \subseteq f_1$ atau $SyS \subseteq f_1$. Misal $SxS \subseteq f_1$, maka $\langle x\rangle^3 \subseteq SxS \subseteq f_1$. Karena $x \in \langle x\rangle \subseteq \langle x\rangle^3$, diperoleh $x \in f_1$. Hal ini kontradiksi dengan yang diketahui. Jadi, klaim terbukti.
Pilih $a = xsy$ untuk suatu $s \in S$, diperoleh $f(a) = f(x) = f(y) = t$. Oleh karena itu,

$$g \circ h\ (a) = \bigvee_{a=bc} g(b) \wedge h(c) \geq g(x) \wedge h(sy) \geq g(x) \wedge h(y) > t = f(a).$$

Hal ini kontradiksi dengan fakta $g \circ h \subseteq f$. Jadi, f ideal prima fuzzy pada S. ∎

Teorema 11 Diberikan semigrup S. Jika f ideal fuzzy pada S yang tak konstan, maka $f(a) \vee f(b) = \bigwedge f(aSb)$ untuk setiap $a, b \in S$.
Bukti. Ambil sebarang $a, b \in S$. Karena f ideal fuzzy pada S, diperoleh $f(asb) = f(a(sb)) \geq f(a)$ dan $f(asb) = f((as)b) \geq f(b)$ untuk setiap $s \in S$. Sehingga diperoleh $\wedge f(aSb) \geq f(a)$ dan $\wedge f(aSb) \geq f(b)$. Jadi, $\wedge f(aSb) \geq f(a) \vee f(b)$.
Misal $\wedge f(aSb) = \mathrm{t}$. Ambil sebarang g dan h subhimpunan fuzzy yang berturut-turut didefinisikan sebagai berikut

$$g(x) = \begin{cases} t, x \in SaS \\ 0, \text{lainnya} \end{cases}$$

dan

$$h(x) = \begin{cases} t, x \in SbS \\ 0, \text{lainnya.} \end{cases}$$

Sebelum lebih jauh, akan ditunjukkan bahwa g dan h ideal fuzzy pada S. Ambil sebarang $s \in S$ dan $x \in SaS$ dengan $x = iaj$ untuk suatu $i, j \in S$. Didapat $sx = s(iaj) = (si)aj \in SaS$ dan $xs = (iaj)s = (ia)js \in SaS$. Sehingga diperoleh $g(sx) = t \geq g(s)$ dan $g(sx) = t \geq g(x)$. Jadi, g merupakan ideal fuzzy. Dengan cara yang sama, diperoleh h ideal fuzzy pada S. Lebih jauh, diperoleh

$$g \circ h(x) = \begin{cases} t, y \in SaS, z \in SbS \\ \quad 0, \text{lainnya.} \end{cases}$$

Jika $g \circ h(x) = t$, maka terdapat $u \in aS$ dan $v \in SbS$ sedemikian hingga $x = uv$. Oleh karena itu, terdapat $m, n, p, q \in S$ sedemikian hingga $u = man$ dan $v = pbq$.Jadi,
$f(x) = f(uv) = f(manpbq) \geq f(anpb) \geq \wedge f(aSb) = t.$

Oleh karena itu, $(g \circ h)(x) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in S$. Karena f ideal prima fuzzy pada S, maka diperoleh $g \subseteq f$ atau $h \subseteq f$. Asumsikan $g \subseteq f$, ambil k subhimpunan fuzzy yang didefinisikan sebagai berikut.

$$k(x) = \begin{cases} t, x \in SaS \\ 0, \text{lainnya.} \end{cases}$$

Berakibat k ideal fuzzy pada S. Perhatikan bahwa

$$k \circ k(x) = \begin{cases} t, y, z \in SaS \\ 0, \text{lainnya.} \end{cases}$$

Ambil $y = cad$ dan $z = eai$ untuk suatu $c, d, e, i \in S^1$, perhatikan bahwa $x = yz = (cad)(eai) = ca(deai) \in SaS$. Sehingga diperoleh $(k \circ k)(x) = t$ berakibat $g(x) = g(yz) = g((cad)(eai)) = g(ca(deai)) = t$. Oleh karena itu, $k \circ k \subseteq g \subseteq f$. Karena f ideal prima fuzzy, maka $t = k(a) \subseteq f(a)$. Dengan cara yang sama, untuk kasus $h \subseteq f$, diperoleh $t = k(b) \subseteq f(b)$. Jadi, $\wedge f(aSb) \leq f(a) \vee f(b)$.

Contoh 12. Diberikan semigrup S dengan operasi $*$ yang didefinisikan sebagai berikut

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	c	c	c.

Didefinisikan ideal fuzzy $f : S \to [0,1]$ oleh $f(a) = f(b) = 0{,}4$ dan $f(c) = 0{,}7$. Perhatikan bahwa,

a. Untuk $x = a$ dan $y = a$, diperoleh

$$f(a) \vee f(a) = 0{,}4 \vee 0{,}4 = 0{,}4$$

$$f(aSa) = \bigwedge\big(f(aaa), f(aba), f(aca)\big) = \bigwedge(f(a), f(a), f(a)) = 0{,}4$$

Jadi, $f(a) \vee f(a) = \wedge f(aSa)$.

b. Untuk $x = a$ dan $y = b$, diperoleh

$$f(a) \vee f(b) = 0{,}4 \vee 0{,}4 = 0{,}4$$

$$f(aSb) = \bigwedge(f(aab), f(abb), fb) = \bigwedge\big(f(b), f(b), f(c)\big) = 0{,}4$$

Jadi, $f(a) \vee f(b) = \wedge f(aSb)$.

Dengan cara yang sama untuk kasus yang lain, yaitu $x = a$ dan $y = c$, $x = b$ dan $y = b$, $x = b$ dan $y = c$, serta $x = c$ dan $y = c$. Dari semua kasus tersebut, dapat disimpulkan bahwa $f(x) \vee f(y) = \wedge f(xSy)$ untuk setiap $x, y \in S$. Selanjutnya dengan memilih ideal fuzzy g dan h yang didefinisikan sebagai $g(a) = 0{,}5$, $g(b) = 0{,}5$, $g(c) = 0{,}6$, $h(a) = 0{,}3$, $h(b) = 0{,}3$, dan $h(c) = 0{,}8$. Dengan cara yang sama seperti pada Contoh 8, dapat disimpulkan bahwa f bukan merupakan ideal prima fuzzy pada S.

Teorema 13 Diberikan semigrup S. Jika f ideal fuzzy pada S, maka f ideal prima fuzzy pada S jika dan hanya jika memenuhi kondisi sebagai berikut :

1. $|\mathrm{Im}(f)| = 2$.

2. $f(a) \vee f(b) = \wedge\, f(aSb)$ untuk setiap $a, b \in S$.

Bukti. ($\Rightarrow$) Berdasarkan Teorema 3.6, diperoleh $|Im(f)| = 2$. Selanjutnya berdasarkan Teorema … didapat $f(a) \vee f(b) = \wedge f(aSb)$ untuk setiap $a, b \in S$.

($\Leftarrow$) Misal $|Im(f)| = \{s, t\}$ dengan $s < t$. Ambil sebarang g dan h ideal fuzzy pada S sedemikian hingga $g \circ h \subseteq f$. Jika $g \nsubseteq f$ dan $h \nsubseteq f$, maka terdapat $x, y \in S$ sedemikian hingga $g(x) > f(x)$

dan $h(y) > f(y)$. Sehingga diperoleh $g(x) = h(x) = t$ dan $f(x) = f(y) = s$. Dari yang diketahui, yaitu $f(a) \vee f(b) = \wedge f(aSb)$, terdapat $u \in S$ sedemikian hingga $f(xuy) = s$. Karena $g \circ h \subseteq f$, diperoleh $s = f(xuy) \geq (g \circ h)(xuy) \geq g(xu) \wedge h(y) \geq g(x) \wedge h(y) = t$.
Hal ini kontradiksi dengan $s < t$. ■

Contoh 14. Misal diberikan semigrup $S = \mathbb{Z}$ dengan operasi perkalian. Didefinisikan bahwa subhimpunann fuzzy f pada S sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{jika } x = 2m \\ \frac{1}{2}, \text{jika } x = 2k + 1. \end{cases}$$

dengan $k \in \mathbb{Z}$ dan m adalah bilangan bulat tak nol. Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa f merupakan ideal fuzzy pada S. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $f(a) \vee f(b) = \wedge f(aSb)$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$. Untuk menunjukkan ini, akan dibagi menjadi beberapa kasus. Karena $2m$ dan $2k + 1$ berturut-turut merupakan bilangan genap dan ganjil, sehingga berakibat $2m \cdot 2m$\$ adalah bilangan genap, $2m(2k + 1)$ adalah bilangan genap dan $(2k + 1)(2k + 1)$ adalah bilangan ganjil. Perhatikan,

a. Untuk $a = 2m$ dan $b = 2m$, sehingga didapat
$$f(a) \vee f(b) = f(2m) \vee f(2m) = 1 \vee 1 = 1$$
$$f(aSb) = \bigwedge (f(2m(2m)2m), f(2m(2k+1)2m)) = (\mathrm{f}(2\mathrm{m});\ \mathrm{f}(2\mathrm{m})) = 1$$
Oleh karena itu, $f(a) \vee f(b) = \wedge f(aSb)$.

b. Untuk $a = 2m$ dan $b = 2k + 1$, sehingga didapat
$$f(a) \vee f(b) = f(2m) \vee f(2k+1) = 1 \vee \frac{1}{2} = 1$$
$$f(aSb) = \bigwedge \left(f\big(2m(2m)(2k+1)\big), f(2m(2k+1)(2k+1))\right) = (\mathrm{f}(2\mathrm{m});\ \mathrm{f}(2\mathrm{m})) = 1$$
Oleh karena itu, $f(a) \vee f(b) = \wedge f(aSb)$.

c. Untuk $a = 2k + 1$ dan $b = 2k + 1$, sehingga didapat
$$f(a) \vee f(b) = f(2k+1) \vee f(2k+1) = \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$f(aSb) = \bigwedge \left(f\big((2k+1)(2m)(2k+1)\big), f((2k+1)(2k+1)(2k+1))\right)$$
$$= \big(\mathrm{f}(2\mathrm{m});\ \mathrm{f}(2k+1)\big) = \frac{1}{2}$$
Oleh karena itu, $f(a) \vee f(b) = \wedge f(aSb)$.

Dari kasus di atas, dapat disimpulkan bahwa $f(a) \vee f(b) = \wedge f(aSb)$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$. Sehingga berdasarkan Teorema 13 dapat disimpulkan bahwa f ideal prima fuzzy pada S.

Teorema 13 dapat digunakan untuk membuktikan bahwa apakah subhimpunan fuzzy pada S merupakan ideal prima fuzzy atau bukan.

Contoh 15. Akan ditunjukkan bahwa semigrup S dengan ideal fuzzy pada Contoh 6 bukan merupakan ideal prima fuzzy. Seperti yang diketahui pada Contoh 6 didefinisikan ideal fuzzy f, g, dan h dengan definisi $f(a) = 0{,}4$, $f(b) = 0{,}6$, $g(a) = 0{,}5$, $g(b) = 0{,}6$, $h(a) = 0{,}2$, dan $h(b) = 0{,}7$. Perhatikan bahwa
$$f(a) \vee f(b) = 0{,}4 \vee 0{,}4 = 0{,}4$$
$$\bigwedge \left(f\big(a(ab)\big), f\big(a(bb)\big)\right) = \bigwedge \big(f(ab), f(ab)\big) = \bigwedge \big(f(b), f(b)\big) = 0{,}6$$
Jadi, $f(a) \vee f(b) \neq \wedge f(aSb)$. Dengan kata lain, berdasarkan Teorema 13 berakibat f bukan ideal prima fuzzy pada S.

Contoh 16. Misal diberikan semigrup $S = \{a, b, c, d\}$ dengan operasi # yang didefinisikan sebagai berikut

$*$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	a	c
d	a	d	c	$b.$

Didefinisikan bahwa subhimpunann fuzzy f pada S sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{jika } x = a, c \\ 0{,}3 \quad , \text{jika } x = b, d. \end{cases}$$

Himpunan $P = \{a, c\}$ merupakan ideal di S, lebih jauh bahwa P merupakan ideal prima di S. Dengan kata lain, f_1 merupakan ideal prima di S.
Di sisi lain, dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa f merupakan ideal fuzzy pada S. Selanjutnya dengan memperhatikan beberapa kasus, yaitu $x = a$ dan $y = a$, $x = a$ dan $y = b$, $x = a$ dan $y = c$, $x = a$ dan $y = d$, $x = b$ dan $y = b$, $x = b$ dan $y = c$, $x = b$ dan $y = d$, $x = c$ dan $y = c$, $x = c$ dan $y = d$ serta $x = d$ dan $y = d$ dapat ditunjukkan bahwa berlaku $f(x) \vee f(y) = \wedge f(xSy)$ untuk setiap $x, y \in S$. Sehingga berdasarkan Teorema 10 atau Teorema 13 dapat disimpulkan bahwa f ideal prima fuzzy pada S.

Jika diperhatikan Contoh 16, besar dugaan bahwa berlaku juga karakteristik bahwa ideal fuzzy tak konstan f pada S merupakan ideal prima fuzzy jika dan hanya jika f tak kosong yang merupakan ideal prima di S dan $f(x) \vee f(y) = \wedge f(xSy)$ untuk setiap $\$, y \in S$.

SIMPULAN & SARAN

Simpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dijelaskan sebelumnya, diperoleh beberapa hasil sebagai berikut:

1. Misalkan S semigrup dan f ideal fuzzy pada S, maka f merupakan ideal prima fuzzy pada S jika dan hanya jika $|Im\ (f)| = 2$ dan f_1 tak kosong dan f_1 merupakan ideal prima di S.
2. Misalkan S semigrup dan f ideal fuzzy pada S, maka f merupakan ideal prima fuzzy pada S jika dan hanya jika $|Im\ (f)| = 2$ dan $f(a) \vee f(b) = \wedge f(aSb)$ untuk setiap $a, b \in S$.

Saran

Pada penelitian ini belum semua karakteristik ideal prima fuzzy pada sebarang semigrup dikaji. Hal ini memungkinkan bagi peneliti selanjutnya untuk mengkaji sifat atau karakteristik tersebut untuk memperkaya konsep ideal prima fuzzy.

Jika diperhatikan pada kedua karakteristik ideal prima fuzzy tersebut, besar dugaan bahwa berlaku juga karakteristik bahwa ideal fuzzy tak konstan f pada S merupakan ideal prima fuzzy jika dan hanya jika f_1 tak kosong dan f_1 merupakan ideal prima di S dan $f(x) \vee f(y) = \wedge f(xSy)$ untuk setiap $x, y \in S$.

DAFTAR RUJUKAN

Ahsan, J., dkk, 1995, Semigroups Characterized by Their Fuzzy Ideals, *Fuzzy Systems and Mathematics*, 29-32.
Clifford, A. H., Preston, G. B., 1961, The Algebraic Theory of Semigroups, *American Mathematical Society*, vol.I.
Howie, J.M., 1995, *Fundamentals of Semigroup Theory*, Oxford Science Publication.
Kim, J., 2009, Some Fuzzy Semiprime Ideals of Semigroups, *Journal of The Chungcheong Mathematical Society*, 22, 459-466.
Kuroki, N., 1991, On Fuzzy Semigroups, *Information Sciences*, 53, 203-236.
Rosenfeld, A., 1979, Fuzzy Groups, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35, 512-517.
Setiadji, 2009, *Himpunan dan Logika Samar serta Aplikasinya*, Graha Ilmu, Yogyakarta.

Shabir, M., 2004, Fully Fuzzy Prime Semigroups, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol.I, 163-168.

Wu, M., -, *Characterization of Prime Fuzzy Ideals of a Semigroup* [1], Department of Mathematics and Physics, Wuyi University.

Zadeh, L.A., 1965, Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, 338-353.