MODEL EPIDEMI *SIRS* DENGAN PERTUMBUHAN LOGISTIK

Tesa Nur Padilah
Universitas Singaperbangsa Karawang
tesa.nurpadilah@staff.unsika.ac.id

Abstract

The phenomenon of the spread of infectious disease can be formed as an epidemic model. The simplest epidemic model is SI model which can be extended to SIR and SIS model. If recover person will not be susceptible to same disease until the immunity dies out, then the model will be SIRS model. If all person in SIRS model are in population which have restrictiveness of carrying capacity, then it will be formed SIRS model with logistic growth. This model can be presented mathematically using a system of differential equations. Based on SIRS model with logistic growth, it is obtained three disease-free equilibrium points and one endemic equilibrium point. Two disease-free equilibrium points are not stable, while one more point is asymptotically stable if modified reproduction ratio number more than one and the ratio between intrinsic growth rate with death rate which is caused of disease less than proportion of number of infected person with total population. Based on modified reproduction ratio number, loss of disease from population is affected by the interaction rate between susceptible person with infected person, recovery rate of infected person, death rate which is caused of disease, and birth rate. An endemic equilibrium point is asymptotically stable if basic reproduction ratio number more than one. Based on basic reproduction ratio number, epidemic case in population are affected by several things, they are the interaction rate between susceptible person with infected person, recovery rate of infected person, death rate which is caused of disease, birth rate, the factor which influence birth rate decrease, and intrinsic growth rate.

Keywords: Basic Reproduction Ratio Number, Epidemic, Logistic Growth Model, and Stability of Equilibrium Points

PENDAHULUAN

Penyakit merupakan suatu keadaan abnormal dari tubuh atau pikiran yang menyebabkan ketidaknyamanan, disfungsi, atau kesukaran terhadap orang yang dipengaruhinya. Penyakit dibagi menjadi dua jenis, yaitu penyakit menular dan penyakit tidak menular (Bustan, 1997). Penyakit menular adalah penyakit yang disebabkan oleh kuman berupa virus, bakteri, amuba, atau jamur yang menyerang tubuh manusia, diantaranya influenza, malaria, campak, dan flu burung. Penyakit tidak menular adalah penyakit yang tidak disebabkan oleh kuman, tetapi disebabkan karena adanya problem fisiologis atau metabolisme pada jaringan tubuh manusia, diantaranya batuk, sariawan, dan sakit perut. Penyakit menular dapat menyebabkan wabah pada suatu populasi. Wabah penyakit selama periode waktu yang singkat disebut epidemi. Jika wabah tetap dalam suatu populasi selama jangka waktu yang panjang, maka disebut endemik.

Fenomena penyebaran penyakit menular dapat dibentuk menjadi sebuah model epidemi. Model penyebaran penyakit yang paling sederhana adalah model *SI*. Pada model ini, populasi yang diamati terbagi menjadi dua kompartemen, yaitu kelompok individu yang rentan *S* (*susceptible*) dan kelompok individu terinfeksi *I* (*infectives*). Pada tahun 1927, Kermack-Mckendrick memperluas model *SI* menjadi model *SIR* dengan menambahkan kelompok individu yang sembuh *R* (*recovery*). Pada tahun 1932, Kermack-Mckendrick juga merumuskan model *SIS*. Pada model ini, individu yang terinfeksi dengan seketika menjadi rentan kembali setelah sembuh dari penyakit. Jika pada model, individu yang sembuh tidak akan rentan terhadap penyakit yang sama sampai kekebalannya hilang, maka diperoleh model *SIRS* (Ma dan Li, 2009). Salah satu contoh penyakit untuk model *SIRS* adalah penyakit influenza (Malm, 2004).

Setiap makhluk hidup selalu mengalami perubahan dari waktu ke waktu, dimulai dari adanya kelahiran, perkembangan, hingga kematian, tetapi kemampuan lingkungan dalam menunjang kehidupan makhluk hidup secara optimum memiliki keterbatasan yang disebut dengan daya dukung lingkungan. Oleh karena itu, untuk menggambarkan pertumbuhan suatu populasi, pada tahun 1838 Verhulst memperkenalkan model pertumbuhan logistik. Model pertumbuhan logistik merupakan model pertumbuhan populasi yang menggunakan kaidah logistik, yaitu persediaan logistik ada batasnya. Salah satu bentuk model *SIRS* adalah model *SIRS* dengan pertumbuhan populasi mengikuti model Malthus (eksponensial). Jika seluruh individu pada model epidemi *SIRS* berada pada populasi yang memiliki keterbatasan daya dukung lingkungan, maka dapat dibentuk model epidemi *SIRS* dengan pertumbuhan logistik (Ma dan Li, 2009). Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji kembali penurunan model *SIRS* dengan pertumbuhan logistik pada Ma dan Li (2009) dan penyelesaiannya secara kualitatif untuk mengetahui perilaku model epidemi tersebut. Selanjutnya, model disimulasikan dengan menggunakan *software* Maple.

METODE

Tahapan yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menurunkan model *SIRS* dengan pertumbuhan logistik.
   Model *SIRS* dengan pertumbuhan logistik terdiri dari kelompok individu rentan *S* (*susceptible*), kelompok individu terinfeksi *I* (*infectives*), dan kelompok individu yang sembuh *R* (*recovery*).
2. Menganalisis model secara kualitatif.
   a. Menentukan titik ekuilibrium model (Edwards dan Penney, 2008).
   b. Menentukan angka rasio reproduksi dasar dan angka rasio reproduksi yang dimodifikasi pada model (Brauer, dkk, 2008).
   c. Menganalisis kestabilan titik ekuilibrium serta angka rasio reproduksi dasar dan angka rasio reproduksi yang dimodifikasi pada model (Machowski, 2008).
   Kestabilan titik ekuilibrium diketahui dengan cara dilakukan analisis terhadap bagian riil nilai eigen dari persamaan karakteristik (Edwards dan Penney, 2008). Penentuan bagian riil nilai eigen tersebut menggunakan metode nilai eigen dan kriteria Routh-Hurwitz. Kriteria Routh-Hurwitz digunakan untuk mengecek kestabilan melalui koefisien persamaan karakteristiknya tanpa menghitung akar-akar dari persamaan karakteristik yang ada (Olsder, dkk, 2011).
   d. Melakukan simulasi model menggunakan *software* Maple.

Berdasarkan analisis titik ekuilibrium, dapat diketahui perilaku model epidemi *SIRS* dengan pertumbuhan logistik. Berdasarkan angka rasio reproduksi dasar, dapat diketahui faktor-faktor yang dapat menyebabkan kasus epidemik pada populasi. Angka rasio reproduksi dasar (R_0) adalah suatu nilai yang menyatakan rasio dari banyaknya kasus infeksi kedua terhadap kasus infeksi pertama dalam populasi tertutup yang disebabkan oleh individu terinfeksi dan menularkan dalam keseluruhan populasi rentan (Brauer, dkk, 2008). Berdasarkan angka rasio reproduksi yang dimodifikasi, dapat diketahui apakah penyakit pada populasi akan hilang atau tetap ada pada populasi. Jika $\mathrm{R}_1 > 1$ maka penyakit akan hilang, sedangkan jika $\mathrm{R}_1 \leq 1$, maka penyakit akan tetap ada (Ma dan Li, 2009).

HASIL

Model *SIRS* disajikan secara matematis dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinier.

Asumsi Model

Kelompok individu pada model epidemi *SIRS* dengan pertumbuhan logistik dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu kelompok individu rentan, individu terinfeksi, dan individu yang sembuh. Asumsi-asumsi yang digunakan dalam penurunan model epidemi *SIRS* dengan pertumbuhan logistik adalah sebagai berikut:

1. Populasi penduduk bersifat tertutup, artinya perpindahan penduduk seperti imigrasi atau emigrasi diabaikan.
2. Setiap individu yang baru lahir akan menjadi individu rentan.
3. Setiap individu yang rentan akan tertular penyakit jika berinteraksi dengan individu yang terinfeksi.
4. Individu yang terinfeksi dapat mengalami kesembuhan atau kematian (kematian alami atau kematian karena penyakit).

5. Individu yang sembuh menjadi rentan kembali terhadap penyakit yang sama setelah kekebalannya hilang.
6. Pertumbuhan populasi mengikuti pertumbuhan logistik.
7. Tingkat kelahiran dipengaruhi oleh adanya faktor yang mempengaruhi berkurangnya tingkat kelahiran.
8. Tingkat kematian alami untuk individu rentan, individu terinfeksi, dan individu yang sembuh adalah sama dan dipengaruhi oleh adanya faktor yang mempengaruhi tingkat kematian alami.

Variabel dan Parameter

Variabel-variabel dan parameter-parameter yang digunakan untuk menurunkan model epidemi *SIRS* dengan pertumbuhan logistik adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Daftar Variabel dan Parameter

Simbol	Definisi	Jenis	Syarat	Satuan
N	Total populasi manusia	Variabel	$0 \leq N \leq K$	jiwa
S	Jumlah individu rentan	Variabel	$S \geq 0$	jiwa
I	Jumlah individu terinfeksi	Variabel	$I \geq 0$	jiwa
R	Jumlah individu sembuh	Variabel	$R \geq 0$	jiwa
r	Tingkat pertumbuhan intrinsik	Parameter	$0 < r < 1$	per waktu
K	Daya dukung lingkungan	Parameter	$K > 0$	jiwa
b	Tingkat kelahiran	Parameter	$0 < b < 1$	per waktu
μ	Tingkat kematian alami	Parameter	$0 < \mu < 1$	per waktu
a	Faktor yang mempengaruhi berkurangnya tingkat kelahiran	Peluang	$0 < a < 1$	
β	Tingkat interaksi individu rentan dengan individu terinfeksi	Parameter	$0 < \beta < 1$	per waktu
α	Tingkat kematian karena penyakit	Parameter	$0 < \alpha < 1$	per waktu
γ	Tingkat kesembuhan individu terinfeksi	Parameter	$0 < \gamma < 1$	per waktu
δ	Tingkat hilangnya imunitas individu yang telah sembuh	Parameter	$0 < \delta < 1$	per waktu

Model Pertumbuhan Logistik yang Memuat Parameter Tingkat Kelahiran dan Tingkat Kematian Alami

Bentuk umum model pertumbuhan logistik adalah

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N. \tag{1}$$

Misalkan b adalah tingkat kelahiran dan μ adalah tingkat kematian alami, dengan mengasumsikan

$$r = b - \mu > 0, b > \mu,$$

maka (1) dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dN}{dt} = \left[\left(b - \frac{arN}{K}\right) - \left(\mu + \frac{(1-a)rN}{K}\right)\right]N. \tag{2}$$

Nilai a menyatakan faktor yang mempengaruhi berkurangnya tingkat kelahiran, yaitu peluang berkurangnya tingkat kelahiran, antara lain karena adanya program Keluarga Berencana (KB), penundaan usia perkawinan, dan semakin banyaknya wanita karir. Berdasarkan (2), diperoleh nilai tingkat kelahiran yang dipengaruhi oleh adanya faktor yang mempengaruhi berkurangnya tingkat kelahiran yaitu $\left(b - \frac{arN}{K}\right)$ dan nilai tingkat kematian alami yang dipengaruhi oleh adanya faktor yang mempengaruhi tingkat kematian alami yaitu $\left(\mu + \frac{(1-a)rN}{K}\right)$.

Penurunan Model

Model epidemi SIRS dengan pertumbuhan logistik berupa sistem persamaan diferensial nonlinier sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \left(b - \frac{arN}{K}\right)N - \frac{\beta SI}{N} - \left(\mu + \frac{(1-a)rN}{K}\right)S + \delta R \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - \left(\gamma + \alpha + \mu + \frac{(1-a)rN}{K}\right)I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I - \left(\delta + \mu + \frac{(1-a)rN}{K}\right)R.
\end{aligned} \tag{3}$$

Selanjutnya, $N = S + I + R$, sehingga laju perubahan total populasi terhadap waktu dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = r\left(\frac{b-\mu}{r} - \frac{N}{K}\right)N - \alpha I. \tag{4}$$

Berdasarkan asumsi $r = b - \mu$, maka (4) dapat ditulis

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N - \alpha I. \tag{5}$$

Sebelum penyakit mulai menginfeksi, total populasi manusia diasumsikan konstan. Dengan demikian, laju perubahan total populasi manusia terhadap waktu adalah nol $\left(\frac{dN}{dt} = 0\right)$ sehingga sebelum penyakit mulai menginfeksi $(I = 0)$ diperoleh

$$r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N = 0. \tag{6}$$

Berdasarkan (6) diperoleh nilai $N = 0$ atau $N = K$. Kemudian berdasarkan asumsi $\frac{dN}{dt} = 0$, dari (5) diperoleh

$$\frac{\alpha I}{N} = r - \frac{rN}{K}. \tag{7}$$

Berdasarkan asumsi $r = b - \mu$ dan dengan mensubstitusikan (7) ke (3) diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \left(b - \frac{arN}{K}\right)N - \frac{\beta SI}{N} + \frac{\alpha IS}{N} - \left(b - \frac{arN}{K}\right)S + \delta R \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} + \frac{\alpha I^2}{N} - \left(\gamma + \alpha + b - \frac{arN}{K}\right)I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I - \left(\delta + b - \frac{arN}{K}\right)R + \frac{\alpha IR}{N}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Selanjutnya, analisis akan lebih mudah dilakukan dengan membentuk variabel baru menggunakan proporsi (perbandingan). Misalkan

x: proporsi jumlah individu rentan dengan total populasi manusia sebelum penyakit menginfeksi.

y: proporsi jumlah individu terinfeksi dengan total populasi manusia sebelum penyakit menginfeksi.

z: proporsi jumlah individu sembuh dengan total populasi manusia sebelum penyakit menginfeksi.

v: proporsi total populasi manusia dengan total populasi manusia sebelum penyakit menginfeksi.

Berdasarkan proporsi tersebut, dapat diketahui bahwa

$$x = \frac{S}{N}, y = \frac{I}{N}, z = \frac{R}{N}, v = \frac{N}{N} = 1$$

dengan

$$x + y + z = \frac{S}{N} + \frac{I}{N} + \frac{R}{N} = \frac{N}{N}$$

atau

$$x = 1 - y - z.$$

Diketahui bahwa total populasi manusia sebelum penyakit mulai menginfeksi sama dengan daya dukung lingkungannya atau $N = K$, sehingga variabel-variabel x, y, z, dan v dapat ditulis

$$x = \frac{S}{K}, y = \frac{I}{K}, z = \frac{R}{K}, v = \frac{N}{K}.$$

Variabel-variabel x, y, z, dan v merupakan perbandingan antara variabel-variabel S, I, dan R dengan total populasi manusia sebelum penyakit mulai menginfeksi (K). Agar variabel-variabel x, y, z, dan v dapat digunakan, maka perubahan jumlah setiap kelompok individu pada populasi manusia, yaitu persamaan-persamaan pada (8) harus dibagi dengan K, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (b - arv) - (\beta - \alpha)xy - (b - arv)x + \delta z \\ \frac{dy}{dt} &= [\beta x + \alpha y] - (\gamma + \alpha + b - arv)y \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma y - (\delta + b)z + arvz + \alpha yz. \end{aligned} \tag{9}$$

Selanjutnya, jika (5) dibagi dengan K, maka

$$\frac{dv}{dt} = [r(1 - v) - \alpha y]v. \tag{10}$$

Sebelumnya, diketahui nilai $x = 1 - y - z$. Jika $x = 1 - y - z$ disubstitusikan ke persamaan kedua pada (9), maka

$$\frac{dy}{dt} = [\beta - (\gamma + \alpha + b) - (\beta - \alpha)y - \beta z + arv]y. \tag{11}$$

Berdasarkan (11), persamaan ketiga pada (9), dan (10), diperoleh sistem berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= [\beta - (\gamma + \alpha + b) - (\beta - \alpha)y - \beta z + arv]y \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma y - (\delta + b)z + arvz + \alpha yz \\ \frac{dv}{dt} &= [r(1 - v) - \alpha y]v. \end{aligned} \tag{12}$$

Domain untuk (12) adalah

$$D = \{(y, z, v) \in R_+^3 : y + z \leq 1, v \leq 1\}.$$

PEMBAHASAN

Titik Ekuilibrium

Sistem (12) mempunyai dua jenis titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium pada (12) diperoleh jika

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0.$$

Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah titik ekuilibrium pada saat tidak ada penyakit dalam populasi. Dengan kata lain, jumlah individu terinfeksi adalah nol $(I = 0)$, sehingga proporsi jumlah individu terinfeksi dengan total populasi manusia sebelum penyakit menginfeksi adalah $y = 0$. Titik ekuilibrium bebas penyakit untuk model epidemi *SIRS* dengan pertumbuhan logistik yaitu $T_1 = (y, z, v) = (0,0,0)$, $T_2 = (y, z, v) = (0,0,1)$, dan $T_3 = (y, z, v) = (y_3, z_3, 0)$. Nilai z diperoleh dari

$$\frac{\beta - (\gamma + \alpha + b) - \beta z}{\beta - \alpha} = \frac{(\delta + b)z}{\gamma + \alpha z}.$$

Nilai z yang digunakan adalah nilai z yang bernilai postiif, dalam hal ini z_3. Selanjutnya, nilai y_3 diperoleh dengan mensubstitusikan z_3 ke persamaan

$$y_3 = \frac{\beta - (\gamma + \alpha + b) - \beta z_3}{\beta - \alpha}$$

atau

$$y_3 = \frac{(\delta + b)z_3}{\gamma + \alpha z_3}.$$

Titik Ekuilibrium Endemik

Titik ekuilibrium endemik adalah titik ekuilibrium pada saat terdapat penyakit dan penyakit tersebut menyebabkan epidemi pada populasi. Titik ekuilibrium endemik untuk model epidemi *SIRS* dengan pertumbuhan logistik yaitu

$$T_4 = (y, z, v) = \left(y_4, z_4, \frac{r - \alpha y_4}{r}\right).$$

Nilai z diperoleh dari

$$\frac{\beta - (\gamma + \alpha + b - ar) - \beta z}{\beta - \alpha(1 - \alpha)} = \frac{(\delta + b - ar)z}{\gamma + \alpha(1 - \alpha)z}.$$

Nilai z yang digunakan adalah nilai z yang bernilai postiif, dalam hal ini z_4. Selanjutnya, nilai y_4 diperoleh dengan mensubstitusikan z_4 ke persamaan

$$y_4 = \frac{\beta - (\gamma + \alpha + b - ar) - \beta z_4}{\beta - \alpha(1 - \alpha)}$$

atau

$$y_4 = \frac{(\delta + b - ar)z_4}{\gamma + \alpha(1 - \alpha)z_4}.$$

Angka Rasio Reproduksi Dasar dan Angka Rasio Reproduksi yang Dimodifikasi

Penurunan angka rasio reproduksi dasar dilakukan dengan menganalisis titik ekuilibrium endemik, sedangkan penurunan angka rasio reproduksi yang dimodifikasi dilakukan dengan menganalisis titik ekuilibrium bebas penyakit. Angka rasio reprosuksi dasar untuk model epidemi *SIRS* dengan pertumbuhan logistik yaitu

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma + \alpha + b - ar}.$$

Angka rasio reprosuksi yang dimodifikasi untuk model epidemi *SIRS* dengan pertumbuhan logistik yaitu

$$R_1 = \frac{\beta}{\gamma + \alpha + b}.$$

Analisis Perilaku Model

Analisis perilaku model dilakukan dengan terlebih dahulu membentuk matriks Jacobi hasil linierisasi (12) di titik ekuilibrium. Matriks Jacobi hasil linierisasi model epidemi *SIRS* dengan pertumbuhan logistik di sekitar titik ekuilibrium $T = (y, z, v)$ adalah

$$J_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\partial y} & \frac{\partial\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\partial z} & \frac{\partial\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\partial v} \\ \frac{\partial\left(\frac{dz}{dt}\right)}{\partial y} & \frac{\partial\left(\frac{dz}{dt}\right)}{\partial z} & \frac{\partial\left(\frac{dz}{dt}\right)}{\partial v} \\ \frac{\partial\left(\frac{dv}{dt}\right)}{\partial y} & \frac{\partial\left(\frac{dv}{dt}\right)}{\partial z} & \frac{\partial\left(\frac{dv}{dt}\right)}{\partial v} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow J_T = \begin{bmatrix} \beta - (\gamma + \alpha + b) - \beta z + arv - 2(\beta - \alpha)y & -\beta y & ary \\ y + \alpha z & -\delta - b + arv + ay & arz \\ -\alpha v & 0 & r - 2rv - \beta y \end{bmatrix}$$

Analisis Perilaku Model di Titik Ekuilibrium

Berdasarkan analisis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit, $T_1 = (y, z, v) = (0,0,0)$ dan $T_2 = (y, z, v) = (0,0,1)$ bersifat tidak stabil, sedangkan $T_3 = (y, z, v) = (y_3, z_3, 0)$ akan bersifat stabil asimtostis jika $\frac{r}{\alpha} < y_3$ dan $R_1 = \frac{\beta}{\gamma+\alpha+b} > 1$ serta tidak stabil jika $\frac{r}{\alpha} > y_3$ dan $R_1 = \frac{\beta}{\gamma+\alpha+b} \leq 1$.

Berdasarkan analisis kestabilan titik ekuilibrium endemik, $T_4 = (y, z, v) = \left(y_4, z_4, \frac{r - \alpha y_4}{r}\right)$ bersifat stabil asimtotik jika $R_0 = \frac{\beta}{\gamma+\alpha+b-ar} > 1$.

Analisis Angka Rasio Reproduksi Dasar dan Angka Rasio Reproduksi yang Dimodifikasi

Angka rasio reproduksi dasar $R_0 = \frac{\beta}{\gamma+\alpha+b-ar}$ menyatakan kasus epidemi pada populasi dipengaruhi oleh tingkat interaksi antara individu rentan dengan individu terinfeksi (β), tingkat kesembuhan individu terinfeksi (γ), tingkat kematian karena penyakit (α), tingkat kelahiran (b), faktor yang mempengaruhi berkurangnya tingkat kelahiran (a), dan tingkat pertumbuhan intrinsik (r). Nilai $R_0 > 1$, maka akan terjadi kasus epidemi pada populasi.

Angka rasio reproduksi yang dimodifikasi $R_1 = \frac{\beta}{\gamma+\alpha+b}$ menyatakan hilangnya penyakit dari populasi dipengaruhi oleh tingkat interaksi antara individu rentan dengan individu terinfeksi (β), tingkat kesembuhan individu terinfeksi (γ), tingkat kematian karena penyakit (α), dan tingkat kelahiran (b). Angka rasio reproduksi yang dimodifikasi $R_1 = \frac{\beta}{\gamma+\alpha+b} > 1$, artinya penyakit akan hilang dari populasi. Dengan demikian, nilai $R_1 = \frac{\beta}{\gamma+\alpha+b}$ merupakan syarat agar populasi menuju titik ekuilibrium bebas penyakit.

Simulasi Model

Simulasi model dilakukan dengan menggunakan *software Maple*. Pada bagian ini dilakukan simulasi untuk titik ekuilibrium yang stabil asimtotik, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $T_3 = (y, z, v) = (y_3, z_3, 0)$ dan titik ekuilibrium endemik $T_4 = (y, z, v) = \left(y_4, z_4, \frac{r-\alpha y_4}{r}\right)$.

Simulasi di Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Nilai-nilai parameter yang digunakan untuk simulasi di titik ekuilibrium bebas penyakit $T_3 = (y_3, z_3, 0)$ adalah $r = 0{,}0018; b = 0{,}014; \mu = 0{,}00017; a = 0{,}5; \beta = 0{,}8; \alpha = 0{,}18; \gamma = 0{,}5$; dan $\delta = 0{,}09$. Jadi, diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit

$$T_3 = (y, z, v) = (y_3, z_3, 0) = (0{,}02291881; 0{,}11473792; 0).$$

Syarat awal yang dipilih adalah

$$I(0) = 15.000.000, R(0) = 0, \text{ dan } N(0) = 300.000.000.$$

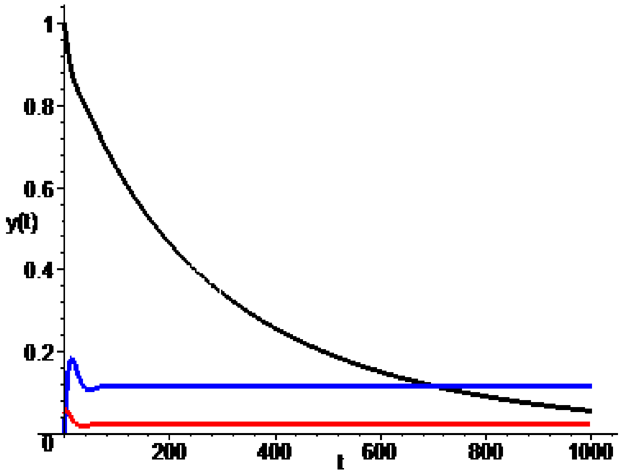
Berdasarkan syarat awal diperoleh

$$y(0) = 0{,}05; z(0) = 0, \text{ dan } v(0) = 1.$$

Bedasarkan nilai-nilai parameter diperoleh

$$R_1 = 1{,}152737752 > 1.$$

Hasil simulasi di titik ekuilibrium bebas penyakit T_3 dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 1. Grafik y_t, z_t, v_t terhadap *t* di titik ekuilibrium bebas penyakit T_3

Berdasarkan hasil simulasi pada Gambar 1 untuk $R_1 = 1{,}152737752 > 1$, proporsi jumlah individu terinfeksi akan menuju 0,0229188, proporsi jumlah individu sembuh akan menuju 0,11473792, dan proporsi total populasi manusia akan menuju 0 untuk jangka waktu tertentu. Proporsi jumlah individu terinfeksi dan proporsi jumlah individu sembuh dipengaruhi oleh total populasi manusia. Jika proporsi total populasi manusia menuju 0, maka total populasi manusia akan menuju 0, sehingga jumlah individu terinfeksi dan jumlah individu sembuh juga akan menuju 0. Dengan demikian, jumlah populasi akan menuju ke titik ekuilibrium bebas penyakit $T_3 = (y_3, z_3, 0) = (0{,}02291881; 0{,}11473792; 0)$. Hal ini berarti tidak terjadi epidemi pada populasi.

Simulasi di Titik Ekuilibrium Endemik

Nilai-nilai parameter yang digunakan untuk simulasi di titik ekuilibrium endemik $T_4 = (y_4, z_4, v_4)$ adalah $r = 0{,}18; b = 0{,}014; \mu = 0{,}00017; a = 0{,}5; \beta = 0{,}9; \alpha = 0{,}2; \gamma = 0{,}5$; dan $\delta = 0{,}15$. Jadi, diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit

$$T_4 = (y, z, v) = (y_4, z_4, v_4) = (0{,}038265919; 0{,}272652516; 0{,}957482312).$$

Syarat awal yang dipilih adalah

$$I(0) = 15.000.000, R(0) = 0, \text{ dan } N(0) = 300.000.000.$$

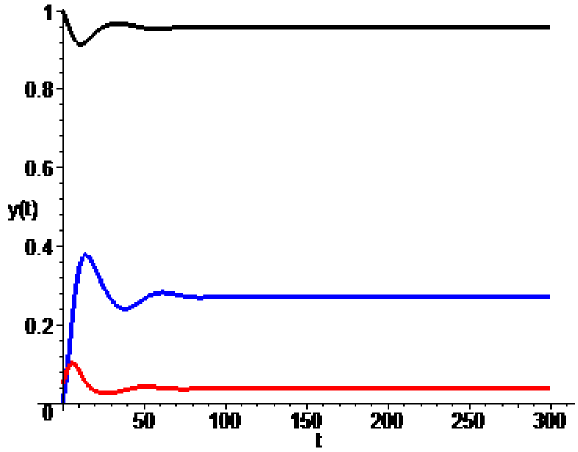
Berdasarkan syarat awal diperoleh

$$y(0) = 0{,}05; z(0) = 0, \text{ dan } v(0) = 1.$$

Bedasarkan nilai-nilai parameter diperoleh

$$R_0 = 1{,}442307692 < 1.$$

Hasil simulasi di titik ekuilibrium bebas penyakit T_4 dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 2. Grafik y_t, z_t, v_t terhadap t di titik ekuilibrium endemik T_4

Berdasarkan hasil simulasi pada Gambar 2 untuk $R_0 = 1{,}442307692 > 1$, proporsi jumlah individu terinfeksi akan menuju 0,038265919, proporsi jumlah individu sembuh akan menuju 0,272652516, dan proporsi total populasi manusia akan menuju 0,957482312 untuk jangka waktu tertentu. Hal ini berarti terjadi epidemi pada populasi. Total populasi manusia (N), jumlah individu terinfeksi (I), individu sembuh (R), dan individu rentan (S) untuk jangka waktu yang lama akan menuju ke nilai-nilai berikut:

$$N = 287.244.694 \text{ jiwa}$$
$$I = 11.479.776 \text{ jiwa}$$
$$R = 81.795.755 \text{ jiwa}$$
$$S = 193.969.163 \text{ jiwa}.$$

SIMPULAN & SARAN

Simpulan

Berdasarkan pembahasan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1) Model epidemi *SIRS* dengan pertumbuhan logistik pada penelitian ini adalah
$$\frac{dy}{dt} = [\beta - (\gamma + \alpha + b) - (\beta - \alpha)y - \beta z + arv]y$$
$$\frac{dz}{dt} = \gamma y - (\delta + b)z + arvz + \alpha yz$$
$$\frac{dv}{dt} = [r(1 - v) - \alpha y]v.$$
2) Model epidemi *SIRS* dengan pertumbuhan logistik mempunyai tiga titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu $T_1 = (0,0,0)$ dan $T_2 = (0,0,1)$ yang bersifat tidak stabil, serta $T_3 = (y_3, z_3, 0)$ yang bersifat stabil asimtostis jika $\frac{r}{\alpha} < y_3$ dan $R_1 = \frac{\beta}{\gamma+\alpha+b} > 1$. Sedangkan titik ekuilibrium endemiknya ada satu yaitu $T_4 = \left(y_4, z_4, \frac{r-\alpha y_4}{r}\right)$ yang bersifat stabil asimtotik jika $R_0 = \frac{\beta}{\gamma+\alpha+b-ar} > 1$.
3) Simulasi dilakukan pada titik ekuilibrium yang bersifat stabil asimtotis. Berdasarkan simulasi di titik ekuilibrium bebas penyakit $T_3 = (y_3, z_3, 0)$, proporsi jumlah individu terinfeksi akan menuju y_3, proporsi jumlah individu sembuh akan menuju z_3, dan total populasi manusia akan menuju 0 untuk jangka waktu tertentu. Berdasarkan simulasi di titik ekuilibrium endemik $T_4 = \left(y_4, z_4, \frac{r-\alpha y_4}{r}\right)$, proporsi jumlah individu terinfeksi akan menuju

y_4, proporsi jumlah individu sembuh akan menuju z_4, dan total populasi manusia akan menuju $\frac{r-\alpha y_4}{r}$, untuk jangka waktu tertentu.

Saran

Model epidemi *SIRS* dengan pertumbuhan logistik pada penelitian ini tidak memperhatikan adanya perpindahan penduduk seperti imigrasi atau emigrasi. Oleh karena itu, untuk pengembangan model, penulis menyarankan agar dikaji model epidemi *SIRS* yang memperhatikan adanya perpindahan penduduk.

DAFTAR RUJUKAN

Bustan, M. N. 1997. *Pengantar Epidemiologi*. Jakarta: Rineka Cipta.

Brauer, F., Driessche, P. Van Den, dan Wu, J. 2008. *Mathematical Epidemiology*. Verlag Berlin Heidelberg: Springer.

Edwards, C. H. dan Penney, D. E. 2008. *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*. 4^{th} Ed. New Jersey: Prentice-Hall.

Ma, Z. dan Li, J. 2009. *Dinamical Modeling and Analysis of Epidemics*. Singapore: World Scientific Publishing.

Machowski, J., Janusz, W. B., dan James, R. B. 2008. *Power System Dynamics: Stability and Control.* New York: John Wiley & Sons.

Malm, J. 2004. A Mini-Essay on Epidemiological Modelling of Infuenza. *AIMS*.

Olsder, G. J., Woude, J. W. van der, Maks, J. G., dan Jeltsema, D. 2011. *Mathematical Systems Theory*. 4^{th} Ed. Netherlands: VSSD.