



## RUANG DASAR DAN MODEL PROYEKSI STEREOGRAFIK PADA GEOMETRI HIPERBOLIK

Fuad Arianto<sup>1</sup>, Julan Hernadi<sup>2</sup>  
Universitas Muhammadiyah Ponorogo  
[fuad8arianto@gmail.com](mailto:fuad8arianto@gmail.com)

### Abstrak

Geometri Non-Euclid adalah salah satu pengklasifikasian geometri yang tercipta karena usaha para matematikawan untuk membuktikan postulat kelima. Banyak matematikawan menganggap bahwa postulat kelima Euclid bukanlah postulat tetapi dapat dibuktikan dengan empat postulat lainnya. Lalu dalam geometri ini dibedakan lagi menjadi 2 macam, yaitu geometri hiperbolik dan geometri neutral. Geometri Hiperbolik ini masih berdasarkan empat postulat awal tetapi berbeda pada postulat kelimanya. Pada skripsi ini dibahas tentang ruang dasar dan model proyeksi stereografik pada geometri hiperbolik. Pada penelitian ini digunakan metode studi literatur dengan sumber informasi data berasal dari artikel ilmiah seperti buku yang berjudul *Hyperbolic Geometry*, dan *Euclidean and Non-Euclidean Geometries : Development and History*, jurnal ilmiah yang berjudul "Hyperbolic Geometry", dan bahan lain yang berkaitan dengan ruang dasar dan model proyeksi stereografik pada geometri Hiperbolik. Pertama-tama pada penelittan ini dibahas tentang definisi bilangan kompleks, vektor, bidang kompleks  $\mathbb{C}$ , nilai mutlak, dan konsep jarak pada ruang Euclid. kemudian, konsep bidang paruh atas dalam bidang kompleks  $\mathbb{C}$ , garis hiperbolik, dan kesejajaran garis. Kemudian dibahas tentang model proyeksi stereografik pada  $\mathbb{C}$ , dan proyeksi stereografik adalah konformal (sudut-sudut yang diawetkan). Berdasarkan penelitian ini dapat diungkap bahwa dalam geometri hiperbolik terdapat definisi garis hiperbolik. Kesejajaran garis yang berbeda dengan konsep kesejajaran pada geometri Euclid. Lalu terdapat model proyeksi stereografik pada bidang kompleks  $\mathbb{C}$ . Karena model ini terbentuklah dua segitiga yang sebangun. Terungkap juga proyeksi stereografik adalah konformal, yaitu adanya sudut-sudut yang diawetkan karena bidang yang menyinggung suatu titik pada daerah  $S^2 - \{N\}$ . Hasil ini adalah akibat karena model proyeksi stereografik pada bidang kompleks  $\mathbb{C}$ .

**Kata Kunci:** Geometri Non-Euclid, Geometri Hiperbolik, Bidang Paruh Atas, Proyeksi Stereografik, Konformal

### PENDAHULUAN

Geometri merupakan salah satu cabang dari matematika yang memuat konsep mengenai titik, garis, bidang dan benda-benda ruang beserta sifat-sifatnya, ukuran-ukurannya, antara satu dengan yang lain. Kata geometri berasal dari bahasa Yunani *geometrein*, *geo* artinya bumi dan *metrein* artinya untuk mengukur. Geometri kuno sebenarnya adalah kumpulan proses aturan dari pengalaman yang berhasil dicapai melalui suatu percobaan, analogi dari pengamatan, menebak, dan kadang-kadang datang dari intuisi (Greenberg, 1994 : 6). Abstraksi geometri dalam dunia nyata adalah tiga dimensi panjang, lebar, dan tinggi dan secara umum meniadakan kualitas lain seperti warna, kasar atau halus nya permukaan. Geometri mampu membakukan bentuk-bentuk yang sama pada alam supaya dapat dipahami oleh semua orang di dunia. Dalam matematika, geometri umumnya diklasifikasikan menjadi dua jenis, Euclid dan non-Euclid. Geometri Euclid sangat erat kaitannya dengan matematikawan Yunani, Euclid. Dia menghasilkan karya yang monumental dalam geometri, *The Element* yang terdiri dari 13 bagian buku (Greenberg, 1994 : 9). Dalam geometri ini, terdapat lima postulat (aksioma/teorema) yang sangat terkenal. Empat postulat pertama sangat jelas dan mudah dibuktikan, tetapi postulat yang kelima menimbulkan perdebatan diantara para matematikawan. Postulat kelima tersebut dikenal dengan postulat kesejajaran geometri Euclid. Isi dari postulat kelima tersebut secara garis besar adalah "Jika suatu garis lurus  $t$  memotong dua garis lurus  $l$  dan  $m$  dimana garis  $l$  dan  $m$  membentuk sudut dalam sepihak kurang dari  $180^\circ$  maka kedua garis ini akan berpotongan." Banyak matematikawan yang mencoba membuktikan postulat kelima ini. Usaha mereka gagal, tapi tidak sia-sia. Karena dari usaha tersebut mengakibatkan munculnya geometri non-Euclid. Geometri non-Euclid masih berdasarkan empat postulat pertama dari Euclid dan hanya berbeda pada postulat kelimanya. Ada dua macam geometri non-Euclid. Pertama ditemukan hampir bersamaan oleh 3 tokoh berlainan dan masing-masing bekerja sendiri. Tokoh-tokoh tersebut

adalah Karl Friedrich Gauss dari Jerman, Yonos Bolyai dari Hongaria, dan Nicolai Ivanovitch Lobachevsky dari Rusia, geometri ini disebut geometri Lobachevsky (geometri hiperbolik). Yang kedua adalah geometri yang ditemukan oleh G.F.B. Bernhard Riemann dari Jerman, geometri ini disebut geometri Elliptik atau geometri Riemann (Cannon, 1997 : volume 31). Geometri hiperbolik berlandaskan empat postulat awal Euclid dan postulat kelima pada geometri hiperbolik berbeda dengan geometri Euclid. Postulat kelima ini didapatkan dengan mengambil kontradiksi dari postulat kesejajaran pada geometri Euclid, dan disebut postulat kesejajaran geometri hiperbolik. Secara garis besar bunyi postulatnya adalah “melalui satu titik di luar sebuah garis dapat dibuat lebih dari satu garis (tepatnya dua garis) yang sejajar dengan garis tersebut”. Geometri hiperbolik ini erat kaitannya dengan bidang kompleks  $\mathbb{C}$ , karena beberapa materi dasar yang dikenalkan pada geometri hiperbolik ini disajikan pada bidang kompleks  $\mathbb{C}$  yaitu konsep bidang paruh atas pada bidang kompleks  $\mathbb{C}$ , definisi garis hiperbolik dan kesejajaran garis pada bidang paruh atas. Dalam materi ini diberikan juga model proyeksi stereografik pada  $\mathbb{C}$ . Proyeksi stereografik adalah sebuah titik pada bidang  $\mathbb{C}$  yang merupakan proyeksi suatu titik yang menyinggung bola satuan pada ruang Euclid  $\mathbb{R}^3$ . Model ini disajikan pada dua bidang yang berbeda, bidang datar dan bidang ruang. Akibat proyeksi stereografik terbentuk dua segitiga yang sebangun. Teorema model ini mengatakan bahwa proyeksi stereografik adalah konformal (sudut-sudut yang diawetkan) karena adanya bidang singgung di suatu titik pada bola satuan. Geometri hiperbolik ini tergolong baru karena ditemukan pada abad ke-19. Pada perkuliahan sendiri belum pernah dibahas detail khususnya pada prodi pendidikan matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Ponorogo. Berdasarkan hal tersebut, dalam penelitian ini penulis akan melakukan penelitian tentang ruang dasar dan model proyeksi stereografik pada geometri hiperbolik.

## PEMBAHASAN

### Model Untuk Bidang Hiperbolik

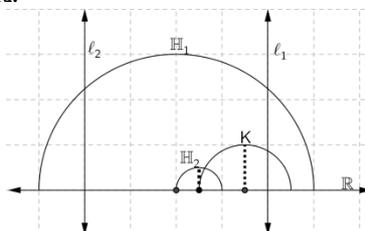
Model dari bidang hiperbolik kita mulai dengan model bidang paruh atas. Ruang yang mendasari model ini adalah bidang paruh atas  $\mathbb{H}$  dalam bidang kompleks  $\mathbb{C}$ , didefinisikan menjadi

$$\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0 \}$$

Kita gunakan gagasan umum dari titik bahwa  $\mathbb{H}$  mewarisi  $\mathbb{C}$ . Kita juga gunakan gagasan umum dari sudut bahwa  $\mathbb{H}$  mewarisi  $\mathbb{C}$ ; bahwa, sudut di antara dua kurva dalam  $\mathbb{H}$  adalah didefinisikan menjadi sudut di antara kurva ketika mereka dianggap menjadi kurva pada  $\mathbb{C}$ , yang mana pada selanjutnya didefinisikan menjadi sudut di antara garis singgung.

### Definisi Garis Hiperbolik

Definisi 1. Terdapat dua tipe garis hiperbolik yang tampak, keduanya mendefinisikan pada syarat objek Euclid pada  $\mathbb{C}$ . Pertama adalah perpotongan dari  $\mathbb{H}$  dengan garis Euclid pada  $\mathbb{C}$  tegak lurus ke sumbu real  $\mathbb{R}$  pada  $\mathbb{C}$ . Kedua adalah perpotongan dari  $\mathbb{H}$  dengan lingkaran Euclid yang berpusat pada sumbu real  $\mathbb{R}$ .

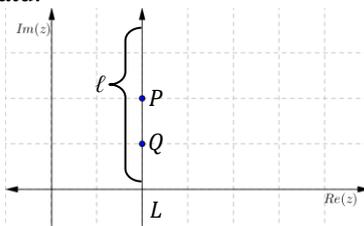


Gambar 1. Dua tipe garis hiperbolik pada  $\mathbb{H}$

**Proposisi 2.** Untuk setiap sepasang titik  $P$  dan  $Q$  yang berbeda pada  $\mathbb{H}$ , terdapat garis hiperbolik  $\ell$  tunggal pada  $\mathbb{H}$  melewati  $P$  dan  $Q$ .

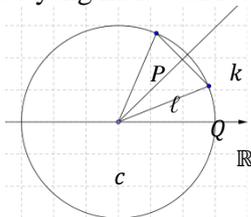
**Bukti.** Kita mulai dengan menunjukkan eksistensinya. Terdapat dua kasus untuk dipertimbangkan. Pertama misalkan  $\text{Re}(P) = \text{Re}(Q)$ . Maka, garis Euclid  $L$  diberikan oleh persamaan  $L = \{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) = \text{Re}(P) \}$  adalah garis tegak lurus dan melewati

$P$  dan  $Q$ . Jadi garis hiperbolik  $\ell = \mathbb{H} \cap L$  adalah garis hiperbolik yang melewati  $P$  dan  $Q$  dan merupakan garis hiperbolik tipe satu.



Gambar 2. Garis hiperbolik tipe 1

Misalkan sekarang  $Re(P) \neq Re(Q)$ . Saat garis Euclid yang melewati  $P$  dan  $Q$  tidak lagi tegak lurus ke  $\mathbb{R}$ , kita perlu membentuk lingkaran Euclid berpusat pada sumbu real  $\mathbb{R}$  melewati  $P$  dan  $Q$ . Misalkan  $\ell_{PQ}$  segment garis Euclid yang bergabung dengan  $P$  dan  $Q$ , dan misalkan  $k$  bisektor yang tegak lurus  $\ell_{PQ}$ . Maka, setiap lingkaran Euclid yang melewati  $P$  dan  $Q$  itu mempunyai pusat pada  $k$ . Saat  $P$  dan  $Q$  punya bagian real yang tidak sama, garis Euclid  $k$  tidak sejajar ke  $\mathbb{R}$ , sehingga  $k$  dan  $\mathbb{R}$  berpotongan di titik tunggal  $c$ . Misalkan  $A$  lingkaran Euclid berpusat di titik  $c$ , dari titik potong  $c$  dengan jari-jari  $|c - P|$ , maka  $A$  melewati  $P$ . Saat  $c$  berada pada  $k$ , kita punya  $|c - P| = |c - Q|$ , dan maka  $A$  melewati  $Q$ . Perpotongan  $\ell_1 = \mathbb{H} \cap A$  adalah garis hiperbolik tipe dua yang melewati  $P$  dan  $Q$ . ■



Gambar 3. Garis hiperbolik tipe 2

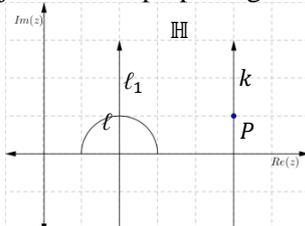
### Kesejajaran Pada $\mathbb{H}$

Pada geometri hiperbolik terdapat definisi kesejajaran dua garis hiperbolik sebagai berikut:

**Definisi 3** (kesejajaran dua garis hiperbolik). Dua garis hiperbolik pada  $\mathbb{H}$  dikatakan sejajar jika keduanya saling lepas.

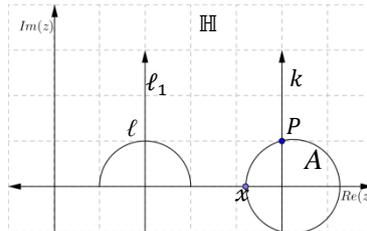
**Teorema 4.** Misalkan  $\ell$  garis hiperbolik pada  $\mathbb{H}$ , dan misalkan  $P$  titik pada  $\mathbb{H}$  tidak pada  $\ell$ . Maka, terdapat takberhingga banyaknya garis hiperbolik berbeda yang melewati  $P$  sejajar  $\ell$ .

Bukti. Terdapat dua cara untuk dipertimbangkan. Pertama, nyatakan bahwa  $\ell$  terdapat pada garis Euclid  $\ell_1$ . Ketika  $P$  tidak pada  $\ell_1$ , terdapat garis Euclid  $k$  melewati  $P$  sejajar ke  $\ell_1$ . Ketika  $\ell_1$  tegak lurus ke  $\mathbb{R}$ , kita mendapati bahwa  $k$  tegak lurus ke  $\mathbb{R}$  juga. Jadi, garis hiperbolik pertama pada  $\mathbb{H}$  yang melewati  $P$  dan sejajar  $\ell$  adalah perpotongan  $\mathbb{H} \cap k$ .



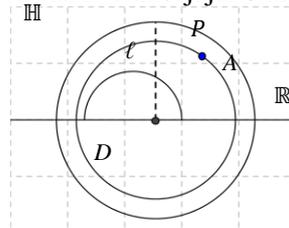
Gambar 4.  $\mathbb{H} \cap k$  adalah garis hiperbolik yang melewati  $P$  dan sejajar  $\ell$

Untuk membangun garis hiperbolik lain yang melewati  $P$  dan sejajar  $\ell$ , ambil titik  $x$  pada  $\mathbb{R}$  di antara  $k$  dan  $\ell_1$ , dan misalkan  $A$  lingkaran Euclid berpusat pada  $\mathbb{R}$  melewati  $x$  dan  $P$ . Kita ketahui terdapat lingkaran Euclid  $A$  yang seperti itu karena  $Re(x) \neq Re(P)$ . Dengan konstruksi,  $A$  saling lepas terhadap  $\ell_1$ , maka garis hiperbolik  $\mathbb{H} \cap A$  saling lepas terhadap  $\ell$ . Sehingga,  $\mathbb{H} \cap A$  adalah garis hiperbolik kedua yang melewati  $P$  sejajar  $\ell$ . Ketika terdapat takberhingga banyaknya titik pada  $\mathbb{R}$  di antara  $k$  dan  $\ell_1$ , konstruksi ini menyajikan takberhingga banyaknya garis hiperbolik yang berbeda melewati  $P$  dan sejajar  $\ell$ .



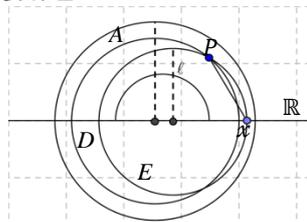
Gambar 5.  $\mathbb{H} \cap A$  adalah garis hiperbolik kedua pada  $\mathbb{H}$

Sekarang, nyatakan bahwa  $\ell$  terdapat pada lingkaran Euclid  $A$ . Misalkan  $D$  lingkaran Euclid yang konsentris ke  $A$  dan melewati  $P$ . Jika lingkaran konsentris saling lepas dan punya pusat yang sama, satu garis hiperbolik melewati  $P$  dan sejajar  $\ell$  adalah perpotongan  $\mathbb{H} \cap D$ .



Gambar 6.  $\mathbb{H} \cap D$  adalah garis hiperbolik yang sejajar  $\ell$ .

Untuk membangun garis hiperbolik kedua melewati  $P$  dan sejajar  $\ell$ , buat sebarang titik  $x$  pada  $\mathbb{R}$  di antara  $A$  dan  $D$ . Misalkan  $E$  lingkaran Euclid berpusat pada  $\mathbb{R}$  melewati  $x$  dan  $P$ . Lalu, dengan konstruksi,  $E$  dan  $A$  saling lepas, maka  $\mathbb{H} \cap E$  adalah garis hiperbolik melewati  $P$  dan sejajar  $\ell$ . Seperti di atas, karena terdapat takberhingga banyaknya titik pada  $\mathbb{R}$  di antara  $A$  dan  $D$ , terdapat takberhingga banyaknya pula garis hiperbolik yang berbeda melewati  $P$  dan sejajar  $\ell$ . Ini melengkapi pembuktian teorema 3.4. ■

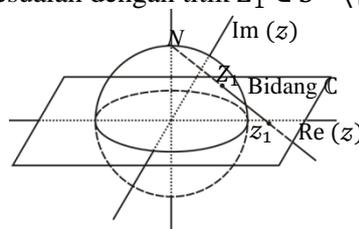


Gambar 7.  $\mathbb{H} \cap E$  adalah garis hiperbolik yang sejajar  $\ell$

**Proyeksi Stereografik (Stereographic Projection)**

Model proyeksi stereografik diberikan sebagai berikut :

Definisi 5. Misalkan  $S^2$  merupakan bola satuan  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  pada ruang Euclid  $\mathbb{R}^3$  dan  $N = (0, 0, 1)$  adalah kutub utara dari  $S^2$ .  $\mathbb{C}$  adalah bidang  $x, y$  pada  $\mathbb{R}^3$ . Jika  $Z_1$  adalah sebarang titik pada  $S^2 \setminus \{N\}$ , misalkan  $\ell_{Z_1}$  garis Euclid pada  $\mathbb{R}^3$  melewati  $N$  dan  $Z_1$ , terdapat titik tunggal  $\xi(Z_1) = z_1$  yang menjadi titik perpotongan  $\ell_{Z_1} \cap \mathbb{C}$ . Ini disebut proyeksi stereografik  $Z_1$  pada  $\mathbb{C}$ . Untuk setiap titik  $z_1 \in \mathbb{C}$  bersesuaian dengan titik  $Z_1 \in S^2 \setminus \{N\}$ .



Gambar 8.  $\xi(Z_1) = z_1$  adalah proyeksi stereografik  $Z_1$  pada bidang  $\mathbb{C}$

**Lemma 6.** Suatu titik  $z_1 = x + iy \in \mathbb{C}$  adalah proyeksi stereografik titik  $Z_1 = (X, Y, Z)$ , dimana

$$X = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \quad Y = \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \quad Z = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad z_1 = \frac{X}{1 - Z} + i \frac{Y}{1 - Z}.$$

**Bukti.** Berdasarkan keadaan definisi 5, Misalkan  $Q$  titik dengan koordinat  $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ , Garis Euclid  $\ell$  melewati  $Q$  dan  $N$ . Garis  $\ell_{QN}$  dinyatakan secara parametrik menjadi

$$N + t(Q - N) = (tq_1, tq_2, tq_3 + 1 - t) \tag{1}$$



Untuk  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\ell_{QN}$  berpotongan dengan bidang  $x, y$  ketika

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ tq_3 + 1 - t &= 0 \\ tq_3 - t &= -1 \\ t(q_3 - 1) &= -1 \\ t &= \frac{-1}{(q_3 - 1)} \\ t &= \frac{1}{1 - q_3} \end{aligned}$$

Karenanya kita lihat formulanya

$$\xi(Q) = \frac{q_1}{1 - q_3} + i \frac{q_2}{1 - q_3} \quad (2)$$

Untuk  $\xi^{-1}$ , misalkan  $z_1 = x + iy$  sebarang titik pada  $\mathbb{C}$  dan perhatikan bahwa  $z_1$  bersesuaian dengan titik  $Z_1 = (x, y, 0)$  pada  $\mathbb{R}^3$ . Misalkan  $\ell$  garis Euclid di antara  $N$  dan  $Z_1$ , dan perhatikan bahwa  $\ell$  diberikan secara parametrik dengan

$$N + t(Z_1 - N) = (tx, ty, 1 - t) \quad (3)$$

Untuk  $t \in \mathbb{R}$ . Untuk  $\ell$  yang berpotongan pada  $S^2$ , kita cari titik pada  $\ell$  yang mempunyai jari-jari 1, yaitu

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \\ (tx)^2 + (ty)^2 + (1 - t)^2 &= 1 \\ t^2x^2 + t^2y^2 + t^2 - 2t + 1 &= 1 \\ t^2(x^2 + y^2) + t^2 - 2t &= 0, \quad \text{dengan} \quad x^2 + y^2 = |z|^2 \\ t^2|z|^2 + t^2 - 2t &= 0 \\ t^2(|z|^2 + 1) - 2t &= 0 \end{aligned}$$

Hasil diatas merupakan persamaan kuadrat yang mempunyai dua penyelesaian yaitu  $t = 0$ , dan  $t = \frac{2}{|z|^2 + 1}$ . Untuk  $t = 0$  bersesuaian dengan  $N$ , untuk  $t$  yang terakhir adalah

$$\xi^{-1}(z_1) = \left( \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3, \quad \xi^{-1}(z_1) = Z_1$$

$$Z_1 = \left( \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3,$$

$$\text{Dengan } X = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \quad Y = \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \quad Z = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Kesimpulan.  $\forall z_1 = x + iy \in \mathbb{C} \rightarrow \exists Z_1 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$  sehingga  $\xi(Z_1) = z_1$ ,

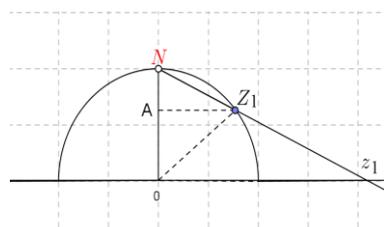
sebaliknya  $\forall Z_1 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \exists z_1 \in \mathbb{C}$  sehingga  $\xi^{-1}(z_1) = Z_1$ .

Secara eksplisit formula  $\xi$  dan  $\xi^{-1}$  adalah :  $S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$  dan  $\xi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow S^2 - \{N\}$ . ■

**Lemma 7.** Nyatakan  $z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  bersesuaian dengan  $Z_2, Z_3 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , maka  $|Z_2 - Z_3| =$

$$\frac{2|z_2 - z_3|}{\sqrt{1 + |z_2|^2} \sqrt{1 + |z_3|^2}}$$

**Bukti.** Kita amati formula keadaan pada lemma 3.5, Formula ini berdasarkan prinsip kesamaan segitiga.  $z_1 \in \mathbb{C}$  bersesuaian dengan  $Z_1 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$  (lemma 3.5) dan segitiga yang dimaksud adalah segitiga  $NOZ_1$  dan  $NAZ_1$ . Karena segitiga  $NOZ_1$  dan  $NAZ_1$  sebangun, maka  $\frac{|N - z_1|}{1} = \frac{|N - Z_1|}{1 - Z}$ .



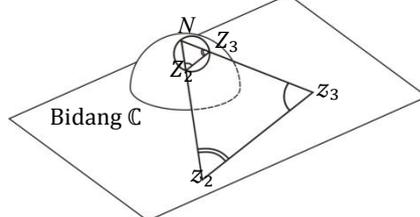
Gambar 9. Segitiga  $NOZ_1$  dan  $NAZ_1$  sebangun



Untuk  $|N - z_1| = \sqrt{|z|^2 + 1}$ , untuk  $1 - Z = \frac{2}{|z|^2 + 1}$ , jadi  $|N - Z_1| = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$ , dan  $|N - z_1||N - Z_1| = \sqrt{|z|^2 + 1} \times \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} = 2$ . Misalkan  $z_1 = z_2$  atau  $z_3 \in \mathbb{C}$  akan bersesuaian dengan  $Z_2, Z_3 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$  dan membentuk bidang  $Nz_2z_3$  berpotongan dengan  $S^2$  pada sebuah lingkaran. Karena  $|N - z_2||N - Z_2| = |N - z_3||N - Z_3| = 2$ , maka segitiga  $Nz_2z_3$  dan  $NZ_3Z_2$  adalah sebangun, jadi  $\frac{|z_2 - z_3|}{|z_2 - z_3|} = \frac{|N - Z_3|}{|N - z_2|}$  atau  $|Z_2 - Z_3| = \frac{2|z_2 - z_3|}{\sqrt{1+|z_2|^2}\sqrt{1+|z_3|^2}}$ . ■

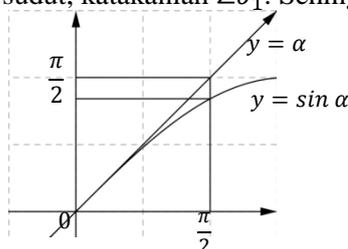
**Teorema 8.** Proyeksi stereografik adalah konformal (mengawetkan sudut, yaitu  $\angle\beta_1 = \angle\theta_2$  dan  $\angle\beta_2 = \angle\theta_1$ ).

**Bukti.** Dari gambar 3.17,  $a(Z_2, Z_3)$  adalah panjang busur dari  $Z_2$  ke  $Z_3$  pada sepanjang lingkaran yang terbentuk dari perpotongan  $S^2$  dengan bidang  $NZ_2Z_3$ . Jika  $\alpha$  adalah  $\angle Z_2NZ_3$ , maka  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos 0} = 1$  (gambar 3.18). Dari hasil ini untuk  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\frac{a(Z_2, Z_3)}{|Z_2 - Z_3|} = \frac{\alpha}{\sin \alpha} \rightarrow 1$ . Dengan demikian, untuk  $z_3 \rightarrow z_2$ ,  $\frac{a(Z_2, Z_3)}{|z_2 - z_3|} \rightarrow \frac{2}{|z_2|^2 + 1}$ .



Gambar 10. Proyeksi stereografik adalah konformal (mengawetkan sudut)

Dari gambar 3.17, garis  $NZ_2$  dengan garis  $Z_2Z_3$  membuat sebuah sudut, katakanlah  $\angle\beta_1$ . Garis  $Nz_3$  dengan garis  $z_2z_3$  membuat sebuah sudut, katakanlah  $\angle\theta_2$ . Sehingga  $\angle\beta_1 = \angle\theta_2$ . Selanjutnya garis  $NZ_3$  dengan garis  $Z_2Z_3$  membuat sebuah sudut, katakanlah  $\angle\beta_2$ . Garis  $Nz_2$  dengan garis  $z_2z_3$  membuat sebuah sudut, katakanlah  $\angle\theta_1$ . Sehingga  $\angle\beta_2 = \angle\theta_1$ . ■



Gambar 11. Grafik  $y = \alpha$  dan  $y = \sin \alpha$

## SIMPULAN DAN SARAN

### Simpulan

1. Pada geometri hiperbolik terdapat dua jenis garis hiperbolik. Pertama adalah perpotongan dari  $\mathbb{H}$  dengan garis Euclid di  $\mathbb{C}$  tegak lurus ke sumbu riil  $\mathbb{R}$  di  $\mathbb{C}$ . Kedua adalah perpotongan dari  $\mathbb{H}$  dengan lingkaran Euclid yang berpusat di sumbu real  $\mathbb{R}$ .
2. Kesejajaran garis pada geometri hiperbolik memang berbeda dengan kesejajaran garis pada geometri Euclid. Pada geometri hiperbolik dua garis dikatakan sejajar apabila keduanya saling lepas.
3. Berdasarkan teorema 3.4, terdapat takberhingga garis hiperbolik yang melewati suatu titik pada  $\mathbb{H}$  dan sejajar suatu garis hiperbolik yang lain.
4. Proyeksi Stereografik (*Stereographic Projection*) dilambangkan dengan  $\xi$ . Proyeksi stereografik adalah sebuah titik pada bidang  $\mathbb{C}$  yang merupakan proyeksi suatu titik yang menyinggung bola satuan pada ruang Euclid  $\mathbb{R}^3$ . Model ini disajikan pada dua bidang yang berbeda, bidang datar dan bidang ruang.



5. Akibat dari proyeksi stereografik terbentuk dua segitiga yang sebangun. Ada beberapa sifat pendefinisian model ini, salah satunya bahwa sifat proyeksi stereografik adalah konformal (mengawetkan sudut). Dari pembuktian 3.4 dapat diketahui sudut-sudut yang diawetkan yaitu  $\angle\beta_1 = \angle\theta_2$  dan  $\angle\beta_2 = \angle\theta_1$ .

#### **Saran**

Dalam penulisan skripsi ini masih sebatas membahas tentang definisi garis hiperbolik, kesejajaran garis pada geometri hiperbolik, model proyeksi stereografik dan adanya sudut-sudut yang diawetkan akibat model ini. Untuk penelitian selanjutnya disarankan lebih mendalami materi lingkaran yang diawetkan pada bidang kompleks  $\mathbb{C}$ .

#### **DAFTAR RUJUKAN**

- Adler, Claire Fisher. 1967. *Modern Geometry*. New York: McGraw-Hill, Inc.
- Anderson, James W. 2005. *Hyperbolic Geometry*. London : Springer-Verlag London Limited.
- Bartle, Robert Gardner, Donald R. Sherbert. 2000. *Introduction To Real Analysis*. New York : John Wiley & Sons, Inc.
- Cannon, James W., William J. Floyd, Richard Kenyon, and Walter R. Parry. 1997. "Hyperbolic Geometry". Volume 31. Minnesota. <http://www.math.uwo.ca/~shafikov/teaching/winter2010/4156/hyperbolic.pdf>. diakses 17 Januari 2015.
- Greenberg, Marvin Jay. 1994. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries : Development and History*. New York: W.H. Freeman and Company.
- Wiley, John and Sons. 1989. *Introduction to Geometry*. Toronto: Brawn-Brumfield, Inc.
- Zill, Dennis G., Patrick D. Shanahan. 2003. *A First Course In Complex Analysis With Application*. United States. Jones and Bartlett Publishers, Inc.