Persamaan Differensial Parsial Difusi Homogen pada Selang $(-\infty,\infty)$ dengan Kondisi Batas Dirichlet dan Neumann

Rukmono Budi Utomo
Universitas Muhammadiyah Tangerang
rukmono.budi.u@mail.ugm.ac.id

Abstract

This paper examines the Partial Differential Equations (PDP) Homogeneous Diffusions on the interval $(-\infty,\infty)$ with Dirichlet and Neumann boundary conditions. Research done by understanding in advance of the general form of differential equations homogeneous diffusions without boundary conditions and find solutions completion. Once the research is done by introducing a common form PDP Diffusions Homogeneous with Dirichlet and Neumann boundary conditions and their completion. In this paper also included examples of the application of PDP Heat homogeneous for both types of the boundary conditions and the analysis.

Keywords: ***Diffusion PDE, Dirichlet and Neumann Boundary Value Problem***

PENDAHULUAN

Misalkan sebuah pipa lurus berbentuk tabung berisikan cairan tak bergerak yang mengandung zat kimia (polutan) dan menyebar melewati cairan tersebut. Para peneliti ingin menyelidiki bagaimana konsenterasi pulutan pada posisi x saat t. Masalah seperti ini disebut panas atau difusi dengan solusi dicari menggunakan persamaan differensial parsial. Persamaan Differensial Parsial (PDP) adalah suatu persamaan yang melibatkan suatu fungsi dengan turunannya. PDP merupakan persamaan differensial bagi fungsi yang memiliki lebih dari satu variabel bebas dan hal inilah yang membedakan dari Persamaan Differensial Total. Apabila diberikan suatu fungsi $Z=F(x)$, maka turunan fungsi Z tersebut disebut Persamaan Differensial Total, karena fungsi akan diturunkan kepada satu-satunya variabel bebas yang dimiliki yakni x.Turunan total untuk fungsi ini dalam matematika dinotasikan dengan $\frac{dZ}{dx}$ atau $\frac{dF(x)}{dx}$. Lain halnya apabila terdapat suatu fungsi $Z=F(x,y)$, maka fungsi Z dapat diturunkan kepada variabel bebas x, dinotasikan dengan $\left(\frac{\partial Z}{dx}\right)$ dan y , dinotasikan dengan $\left(\frac{\partial Z}{dy}\right)$ sehingga turunan ini disebut turunan atau differensial parsial.

PDP Difusis sangat erat kaitannya dengan kehidupan sehari hari. Misalnya saja dalam percobaan memasukkan suatu zat kimia kedalam sebuah pipa yang mengandung cairan , maka untuk mengetahui berapa banyaknya polutan pada posisi x saat t haruslah menggunakan model PDP Difusi. Percobaan atau riset ini banyak dilakukan oleh perusahaan yang bergerak dalam bidang kimia lingkungan, industri bahkan kimia-biologi. Berdasarkan hal itulah perlu dikaji mengenai pembentukan model difusi

Tulisan ini bertujuan menguraikan bentuk umum dari model PDP Difusi homogen sederhana. Dimulai dari pembentukan model difusi, kemudian membentuk model difusi homogen dalam domain $\mathbb{R}$ tanpa syarat batas, kemudian mencari solusi penyelesaiannya. Lebih lanjut akan diuraikan bentuk umum PDP Difusi dengan syarat batas Dirichlet dan Neumann beserta solusi penyelesaiannya untuk kedua kondisi tersebut. Sebagaimana diketahui bahwa dalam model matematika, pasti akan ada syarat awal dan batas yang diberikan. Syarat-syarat ini untuk menemukan solusi khusus dari model tersebut disamping berguna dalam proses simulasi dengan nilai parameter yang telah ditentukan. Tidak lupa dalam penelitian ini juga diberikan contoh penerapan penggunaan model PDP Difusi baik untuk PDP dengan syarat batas Dirichlet maupun Neumann.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah pustaka, yakni mempelajari terlebih dahulu bentuk umum PDP Difusi homogen tanpa syarat batas dan mencari solusinya. Setelah itu, dibentuk PDP Difusi dengan syarat batas Diriclet dan Neumann serta mencari solusi penyelesaian untuk kedua syarat batas tersebut. Buku-buku penunjang yang digunakan dalam penelitian ini antara lain adalah buku *Partial Differential Equations* karya Strauss, *Introduction to Differential Equations: Lecture Notes* karya Jeffrey R Chasnov, *Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations Volume 5* karya Michel Chipot buku *Persamaan Differensial Parsial* dari Departemen Matematika FMIPA ITB dan sumber-sumberlain yang dapat dilihat ada daftar pustaka

HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan Difusi Homogen

Misalkan sebuah cairan tak bergerak mengisi sebuah pipa atau tabung lurus. Akan diselidiki konsentrasi zat kimia yang menyebar melewati cairan tersebut pada posisi x saat t. Konsentrasi polutan pada posisi x saat t dinotasikan dengan $U(x,t)$ yang merupakan solusi pari PDP Difusi. Untuk mencari solusi $U(x,t)$ tentu saja pertama kali harus dicari terlebih dahulu mengenai Persamaan Difusi yang dimaksud

Massa dari suatu polutan saat t didefinisikan dengan

$$M(t)=\int_0^x U(\eta,t)dx \ldots(1)$$

Kemudian apabila persamaan (1) tersebut diturunkan terhadap variabel waktu maka akan diperoleh bentuk sebagai berikut

$$\frac{dM(t)}{dt}=\int_0^x U_t(\eta,t)dx \ldots(2)$$

Persamaan (2) merepresentasikan perubahan konsentrasi zat tiap satuan waktu. Hukum Fick menyatakan bahwa laju polutan yang masuk (*fluks*) sebanding dengan negatif gradient konsentrasi. Dalam matematik, Hukum Fick ini dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dM(t)}{dt}=kU_x(x,t)-kU_x(0,t) \ldots(3)$$

Dengan memandang bentuk persamaan (2) dan (3), maka akan diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\int_0^x U_t(\eta,t)dx &= kU_x(x,t)-kU_x(0,t)\\ &= k\left[U_x(x,t)-U_x(0,t)\right]\\ &= \int_0^x kU_{xx}(\eta,t)\,dx \ \ldots(4)\end{aligned}$$

Persamaan (4) merupakan persamaan Difusi homogen yang dapat dituliskan kembali sebagai

$$U_t = kU_{xx} \Leftrightarrow U_t - kU_{xx} = 0 \ldots (4) \square$$

Persamaan Difusi Dalam Interval $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Bentuk umum persamaan Difusi dalam interval $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} &U_t = kU_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ &U(x,0) = \varnothing(x) \end{aligned} \quad \ldots (5)$$

Bentuk $U(x,0) = \varnothing(x)$ pada persamaan (5) merupakan syarat awal untuk persamaan Difusi pada interval $\mathbb{R}$ yang merepresentasikan solusi $U(x,t)$ saat $t = 0$ bernilai $\varnothing(x)$. Lebih lanjut, akan dicari solusi $U(x,t)$ pada persamaan (5).

Sebelum dilakukan pencarian solusi $U(x,t)$ pada persamaan (5), dikenalkan terlebih dahulu 5 sifat invariant dengan $U(x,t)$ merupakan solusi persamaan yang ditunjukkan pada persamaan (5), kelima sifat tersebut antara lain:

1. Apabila $U(x,t)$ merupakan solusi persamaan (5), maka $U(x-y,t)$ juga merupakan solusi bagi persamaan tersebut.
2. Turunan-turunan dari fungsi $U(x,t)$ seperti U_x, U_t dan U_{tt} juga merupakan solusi.
3. Berdasarkan sifat invariant nomer 2, jika U_t dan U_x merupakan solusi persamaan (5), maka juga berlaku sifat superposisi yakni $U_t + U_x$ juga merupakan solusi PDP tersebut
4. Integral dari suatu bentuk solusi PDP Difusi juga merupakan solusi dan
5. Bentuk $U\left(\sqrt{a}x, at\right)$ juga merupakan solusi yang disebut sifat dilatasi.

Dalam sifat invariant di atas, apabila $S(x,t)$ adalah solusi PDP Difusi , maka berdasarkan sifat invariant nomer 1, $S(x-y,t)$ juga merupakan solusi PDP tersebut. Lebih lanjut dibentuk fungsi

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\varnothing(y)\,dy \ldots (6)$$

Berdasarkan persamaan (6), dapat ditemukan nilai U_t dan U_{xx} sebagai berikut :

$$U_t(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} S(x-y,t)\varnothing(y)\,dy \ \ldots (7)$$

$$U_{xx}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} S(x-y,t)\varnothing(y)\,dy \ldots (8)$$

Dilain pihak, misalkan diberikan suatu fungsi $Q(x,t)$ yang memenuhi persamaan difusi dengan syarat awal

$$Q(x,0) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \ldots (9)$$

Misalkan dibentuk $Q(x,t)=G(P)$ dengan $P=\frac{x}{\sqrt{4kt}}$. Berdasarkan hal tersebut dapat ditemukan

$$Q_t - kQ_{xx} = \frac{1}{t}\left[-\frac{1}{2}PG' - \frac{1}{4}G''\right] \ldots (10)$$

Karena $Q_t - kQ_{xx} = 0$, maka persamaan (10) dapat dituliskan kembali sebagai

$$\frac{1}{t}\left[-\frac{1}{2}PG' - \frac{1}{4}G''\right] = 0 \Leftrightarrow G'' + 2PG' = 0 \ldots (11)$$

yang merupakan Persamaan Differensial homogen orde 2. Solusi dari persamaan (11). Dari persamaan (11), solusi umum $Q(x,t)$ adalah

$$Q(x,t) = C_1 \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-P^2} dp + C_2 \ldots (12)$$

Dengan memandang syarat awal pada persamaan (9), maka akan ditentukan solusi khusus dari PDP Difusi pada interval $\mathbb{R}$. Berdasarkan syarat awal yang diberikan dapat diperlihatkan bahwa

1. Jika $x > 0$, maka nilai $Q(x,t) = 1$, dengan demikian diperoleh persamaan

$$C_1 \int_0^{+\infty} e^{-P^2} dp + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + C_2 = 1 \ldots (13)$$

2. Jika $x < 0$, maka nilai $Q(x,t) = 0$, dengan demikian diperoleh persamaan

$$C_1 \int_0^{-\infty} e^{-P^2} dp + C_2 = 0 \Leftrightarrow -C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + C_2 = 0 \ldots (14)$$

Dari persamaan (13) dan (14) diperoleh nilai $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ dan $C_2 = \frac{1}{2}$ dan. Berdasarkan hal tersebut, solusi khusus PDP Panas pada interval $\mathbb{R}$ adalah

$$Q(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-P^2} dp + \frac{1}{2} \ldots (15)$$

Definisikan $S(x,t) = \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}$, maka diperoleh

$$S(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}, t > 0 \ldots (16)$$

Dengan melihat persamaan (16), maka solusi penyelesaian PDP Difusi pada interval $\mathbb{R}$ berdasarkan persamaan (6) adalah

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \varnothing(y) dy \ldots (17) \square$$

Persamaan Difusi Dalam Interval $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ Dengan Syarat Batas Dirichlet

Bentuk umum Persamaan Difusi dalam interval $\mathbb{R}$ dengan syarat batas Dirichlet dedefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} &U_t = kU_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ &U(x,0) = \varnothing(x) \qquad \ldots(18) \\ &U(0,t) = 0 \end{aligned}$$

Sebelum mencari solusi PDP Difusi dengan syarat batas Dirichlet pada persamaan (18), perlu dikenalkan mengenai perluasan fungsi ganjil yang berkorespondensi dengan syarat batas Dirichlet. Perluasan fungsi ganjil $\varnothing_1(x)$ didefinisikan sebagai

$$\varnothing_1(x) = \begin{cases} \varnothing(x), x > 0 \\ -\varnothing(-x), x < 0 \ldots(19) \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

Berdasarkan hal tersebut solusi PDP Difusi untuk syarat batas Dirichlet adalah

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \left(-\varnothing(-y)\right) dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \left(\varnothing(y)\right) dy \ldots(20)$$

Misalkan $z = -y$, maka $-dz = dy$, dan perhatikan bahwa untuk $y \to -\infty$ maka $z \to \infty$, dan untuk $y = 0$ maka $z = 0$. Berdasarkan hal tersebut, persamaan (20) dapat dituliskan kembali sebagai

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\infty}^{0} e^{-\frac{(x+z)^2}{4kt}} \varnothing(z) dz + \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \varnothing(y) dy \ldots(21)$$

Lebih lanjut dimisalkan kembali $z = y$ maka $dz = dy$ dan perhatikan bahwa untuk $y \to \infty$ maka $z \to \infty$, dan untuk $y = 0$ maka $z = 0$. Berdasarkan hal tersebut, persamaan (21) dapat dituliskan kembali sebagai

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\infty}^{0} e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}} \varnothing(y) dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \left(\varnothing(y)\right) dy \ldots(22)$$

Berdasarkan hal tersebut, solusi PDP Difusi untuk syarat batas Dirichlet adalah

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{0}^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}} \right] \varnothing(y) dy \ldots(23) \ \square$$

Persamaan Difusi Dalam Interval $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ Dengan Syarat Batas Neumann

Bentuk umum Persamaan Difusi dalam interval $\mathbb{R}$ dengan syarat batas Neumann dedefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} &U_t = kU_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ &U(x,0) = \varnothing(x) \qquad \ldots(24) \\ &U_x(0,t) = 0 \end{aligned}$$

Sebelum mencari solusi PDP Difusi dengan syarat batas Neumann pada persamaan (24), perlu dikenalkan mengenai perluasan fungsi genap yang berkorespondensi dengan syarat batas Neumann. Perluasan fungsi genap $\varnothing_2(x)$ didefinisikan sebagai

$$\varnothing_2(x)=\begin{cases}\varnothing(x), x>0\\ \varnothing(-x), x<0 \\ 0, x=0\end{cases} \ldots(25)$$

Berdasarkan hal tersebut solusi PDP Difusi untuk syarat batas Neumann adalah

$$U(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\left(\varnothing(-y)\right)dy+\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\left(\varnothing(y)\right)dy \ldots(26)$$

Misalkan $z=-y$, maka $-dz=dy$, dan perhatikan bahwa untuk $y\to-\infty$ maka $z\to\infty$, dan untuk $y=0$ maka $z=0$. Berdasarkan hal tersebut, persamaan (26) dapat dituliskan kembali sebagai

$$\begin{aligned}U(x,t)&=-\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\infty}^{0} e^{-\frac{(x+z)^2}{4kt}}\varnothing(z)dz+\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\varnothing(y)dy \\ &=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x+z)^2}{4kt}}\varnothing(z)dz+\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\varnothing(y)dy\end{aligned} \ldots(27)$$

Lebih lanjut dimisalkan kembali $z=y$ maka $dz=dy$ dan perhatikan bahwa untuk $y\to\infty$ maka $z\to\infty$, dan untuk $y=0$ maka $z=0$. Berdasarkan hal tersebut, persamaan (27) dapat dituliskan kembali sebagai

$$U(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}}\varnothing(y)dy+\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\left(\varnothing(y)\right)dy \ldots(28)$$

Berdasarkan hal tersebut, solusi PDP Difusi untuk syarat batas Neumann adalah

$$U(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{0}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}+e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}}\right]\varnothing(y)dy \ldots(29) \;\square$$

Dalam penyelesaian PDP Difusi, sangat mungkin solusinya merupakan suatu bentuk fungsi seperti *eror function*, untuk hal demikian perlu didefinisikan suatu fungsi yang disebut *eror function*.

Eror function pada variabel x atau $erf(x)$ didefinisikan sebagai

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-P^2}dp \ldots(30)$$

Beberapa sifat dari $erf(x)$ antara lain:

1. $erf(0)=0$

2. $erf(-x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x} e^{-P^2} dp = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0} e^{-P^2} dp = -erf(x)$
3. $cerf(x) = 1 - erf(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} e^{-P^2} dp$

CONTOH PENERAPAN

1. Diberikan PDP Difusi dengan syarat batas Dirichlect Sbb:

$$U_t = kU_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0$$
$$U(x,0) = \varnothing(x) = 1$$
$$U(0,t) = 0$$

Tentukan solusi $U(x,t)$ dari PDP Difusi di atas.

Solusi Penyelesaian

Karena syarat batasnya adalah Dirichlect, maka dilakukan perluasan fungsi ganjil $\varnothing_1(x)$. Dengan demikian solusi PDP difusi di atas adalah sebagai berikut:

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy - \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}} dy$$

Misalkan $A = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy$ dan $B = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}} dy$, maka solusi $U(x,t) = A - B$. Akan dicari terlebih dahulu solusi dari A. Misalkan $P = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}}$, maka $y = x - P\sqrt{4kt} \Leftrightarrow dy = -\sqrt{4kt}dp$. Perhatikan bahwa untuk $y = 0$ maka $P = \frac{x}{\sqrt{4kt}}$, dan untuk $y \to \infty$ maka $P \to -\infty$. Berdasarkan hal tersebut, persamaan A dapat dituliskan kembali sebagai

$$A = \frac{-1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{-\infty} e^{-P^2} \left(\sqrt{4kt}\right) dP = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{-\infty} e^{-P^2} dP = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-P^2} dP$$

Selanjutnya akan dicari solusi B yakni dengan memisalkan $P = \frac{x+y}{\sqrt{4kt}}$. Berdasarkan hal tersebut $y = P\sqrt{4kt} - x \Leftrightarrow dy = \sqrt{4kt}dp$. $y = x - P\sqrt{4kt} \Leftrightarrow dy = -\sqrt{4kt}dp$. Perhatikan bahwa untuk $y = 0$ maka $P = \frac{x}{\sqrt{4kt}}$, dan untuk $y \to \infty$ maka $P \to \infty$. Berdasarkan hal tersebut, persamaan B dapat dituliskan kembali sebagai

$$B = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-P^2} \left(\sqrt{4kt}\right) dP = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-P^2} dP$$

Dengan demikian bentuk $U(x,t)$ dapat dituliskan sebagai

$$U(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-P^2}dP-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-P^2}dP=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-P^2}dP-\int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-P^2}dP\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-P^2}dP+\int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-P^2}dP+\int_{\infty}^{0} e^{-P^2}dP+\int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-P^2}dP\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-P^2}dP+\int_{\infty}^{0} e^{-P^2}dP\right]+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-P^2}dP$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]+erf\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)$$

Berdasarkan hal tersebut solusi $U(x,t)$ PDP Difusi dengan syarat Dirichlet ini adalah $U(x,t)=erf\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)$ □

2. Pandang kembali contoh 1, apabila syarat batasnya adalah Neumann, maka tentukan solusi $U(x,t)$ PDP Difusi tersebut.

Solusi Penyelesaian

Karena syarat batasnya adalah Neumann maka dilakukan perluasan fungsi genap $\varnothing_2(x)$. Dengan demikian solusi PDP difusi di atas adalah sebagai berikut:

$$U(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}dy+\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}}dy$$

3.

Misalkan $A=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}dy$ dan $B=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}}dy$, maka solusi $U(x,t)=A+B$ .selanjutnya akan dicari terlebih dahulu solusi dari A. Misalkan $P=\frac{x-y}{\sqrt{4kt}}$, maka $y=x-P\sqrt{4kt}\Leftrightarrow dy=-\sqrt{4kt}dp$. Perhatikan bahwa untuk $y=0$ maka $P=\frac{x}{\sqrt{4kt}}$, dan untuk $y\to\infty$ maka $P\to-\infty$. Berdasarkan hal tersebut, persamaan A dapat dituliskan kembali sebagai

$$A=\frac{-1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{-\infty} e^{-P^2}\left(\sqrt{4kt}\right)dP=\frac{-1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{-\infty} e^{-P^2}dP=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-P^2}dP$$

Selanjutnya akan dicari solusi B yakni dengan memisalkan $P=\frac{x+y}{\sqrt{4kt}}$. Berdasarkan hal tersebut $y=P\sqrt{4kt}-x \Leftrightarrow dy=\sqrt{4kt}dp$. $y=x-P\sqrt{4kt} \Leftrightarrow dy=-\sqrt{4kt}dp$. Perhatikan bahwa untuk $y=0$ maka $P=\frac{x}{\sqrt{4kt}}$, dan untuk $y\to\infty$ maka $P\to\infty$. Berdasarkan hal tersebut, persamaan B dapat dituliskan kembali sebagai

$$B=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-P^2}\left(\sqrt{4kt}\right)dP=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-P^2}dP$$

Dengan demikian bentuk $U(x,t)$ dapat dituliskan sebagai

$$U(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-P^2}dP+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-P^2}dP=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-P^2}dP+\int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-P^2}dP\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-P^2}dP=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=1$$

Berdasarkan hal tersebut solusi $U(x,t)$ PDP Difusi dengan syarat Dirichlet ini adalah $U(x,t)=1$ □

KESIMPULAN DAN SARAN

Dalam penelitian ini dapat dirumuskan beberapa kesimpulan dan saran sebagai berikut:

Kesimpulan

1. PDP Difusi dapat dikatakan sebagai suatu persamaan differensial parsial yang menjelaskan penyebaran konsentrasi zat polutan pada suatu cairan didalam pipa lurus. Solusi $U=(x,t)$ menjelaskan banyaknya konsentrasi polutasn pada posisi x saat t.
2. Bentuk umum PDP Difusi pada interval $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ ditunjukkan pada persamaan (5) dengan solusinya $U=(x,t)$ ditunjukkan pada persamaan (17)
3. Bentuk umum PDP Difusi pada interval $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ dengan syarat Dirichlet ditunjukkan pada persamaan (18) dengan solusinya $U=(x,t)$ ditunjukkan pada persamaan (23)
4. Bentuk umum PDP Difusi pada interval $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ dengan syarat Neumann ditunjukkan pada persamaan (24) dengan solusinya $U=(x,t)$ ditunjukkan pada persamaan (29)

Saran

1. Perlu dikembangkan bentuk umum PDP Difusi Non homogen pada interval $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ beserta solusi penyelesaiannya

2. Perlu dikembangkan bentuk umum PDP Difusi Non homogen pada interval $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ dengan syarat batas Dirichlet yang berkorespondensi dengan perluasan fungsi ganjil beserta solusim penyelesaiannya
3. Perlu dikembangkan bentuk umum PDP Difusi Non homogen pada interval $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ dengan syarat batas Neumann yang berkorespondensi dengan perluasan fungsi genap beserta solusi penyelesaiannya

DAFTAR RUJUKAN

Strauss, A., Walter. 2008. *Partial Differential Equations: an Introduction.* USA: John Wiley & Sons

Chasnov, R., Jeffrey. 2009. *Introduction to Differential Equations: Lecture Notes.* Hong Kong: The Hong Kong University of Science and Technology

Chipot, Michel. 2008. *Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations Volume 5.* Amsterdam: Elsevier

Departemen Matematika ITB. 2012. *Persamaan Differensial Parsial.* Bandung: FMIPA ITB

Folland, G.B. 1983. *Lectures on Partial Differential Equations*. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research

Hunter, K., John. 2014. *Notes on Partial Differential Equations.* California: Department of Mathematics, University of California at Davis

Miersemann, Erich. 2012. *Partial Differential Equations: Lecture Notes*. Leipzig: Department of Mathematics Leipzig University

Moore, Doug. 2003. *Introduction to Partial Differential Equations*. California: Department Mathematics of UCSB

Pinchover & Rubinsten. 2005. *An Introduction to Partial Differential Equations*. London: Cambridge University Press

Yanovsky, Igor.2005. *Partial Differential Equations: Graduate Level Problems and Solutions.* California: Department of Mathematics UCLA